



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV AUTOMOBILNÍHO A DOPRAVNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

INSTITUTE OF AUTOMOTIVE ENGINEERING

**PŘÍSTUPY MODELOVÁNÍ PŘESNÉHO TVARU  
OZUBENÍ**

APPROACHES FOR MODELING THE EXACT SHAPE OF THE GEARS

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

Josef Capoušek

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

Ing. Aleš Prokop, Ph.D.

BRNO 2021



# Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav automobilního a dopravního inženýrství  
Student: **Josef Capoušek**  
Studijní program: Strojírenství  
Studijní obor: Základy strojního inženýrství  
Vedoucí práce: **Ing. Aleš Prokop, Ph.D.**  
Akademický rok: 2020/21

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## Přístupy modelování přesného tvaru ozubení

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Bakalářská práce je zaměřena na problematiku konstrukce přesného tvaru profilu zubu ozubených kol. Důraz je kladen na možnost parametrizace CAD modelů, jež budou výstupem práce.

### Cíle bakalářské práce:

Vyhotovení rešerše používaných metod konstrukce přesného tvaru profilu zubu ozubených kol.

Rozdělení jednotlivých metod dle zvolených kritérií.

Na základě získaných poznatků vyhotovení 3D modelů jednotlivých typů ozubení prostřednictvím zvoleného CAD softwaru.

### Seznam doporučené literatury:

SHIGLEY, Joseph Edward, MISCHKE, Charles R. a BUDYNAS, Richard G. (ed.). Konstruování strojních součástí. Přeložil Martin HARTL. V Brně: VUTUM, 2010. 1159 s. ISBN 978-80-214-2629-0.

JAN, Zdeněk, ŽDÁNSKÝ, Bronislav a ČUPERA, Jiří. Automobily (2): Převody. Brno: Avid, spol. s r.o., 2009. ISBN 978-80-87143-12-4.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2020/21

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Josef Štětina, Ph.D.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## ABSTRAKT

Tématem této bakalářské práce je modelování přesného tvaru profilu ozubení s cílem vytvoření parametrického modelu vybraného typu ozubení. V úvodní části jsou shrnuty základní pojmy a rozdělení ozubených kol. Následuje přehled metod konstrukcí přesného tvaru profilu zubu včetně příkladů v podobě rovinného evolventního, sférického evolventního a oktooidního profilu. V poslední části jsou popsány metody modelování kuželového ozubení a tvorba modelu ozubení vyráběného cyklo-paloidním způsobem.

## KLÍČOVÁ SLOVA

Kuželová ozubená kola, sférická evolventa, zakřivené kuželové ozubení, cyklo-paloidní, parametrický model

## ABSTRACT

The topic of the bachelor's thesis is the modelling an accurate tooth shape profile, with the goal to create parametric model of the chosen type of gear. In the introduction part the basic terms and classification of the gears are summarized. The following is the overview of the methods of construction an accurate tooth shape profile including examples in the form of planar involute, spherical involute and octoid profile. In the last section the methods of the modelling bevel gear, and creation of the model gear manufactured by Cyclo-Palloid method are described.

## KEYWORDS

Bevel gears, spherical involute, spiral bevel gears, Cyclo-Palloid, parametric model

## BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

CAPOUŠEK, Josef. *Přístupy modelování přesného tvaru ozubení*. Brno, 2021. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/129456>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav automobilního a dopravního inženýrství. 51 s. Vedoucí práce Aleš Prokop.

## ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že tato práce je mým původním dílem, zpracoval jsem ji samostatně pod vedením Ing. Aleše Prokopa, Ph.D a s použitím informačních zdrojů uvedených v seznamu.

V Brně dne 20. května 2021

.....

Josef Capoušek

## PODĚKOVÁNÍ

Chtěl bych tímto poděkovat za konzultace, cenné rady a podporu vedoucímu bakalářské práce panu Ing. Alešovi Prokopovi, Ph.D. Dále pak za velkou podporu od rodiny v průběhu celého mého studia.



# OBSAH

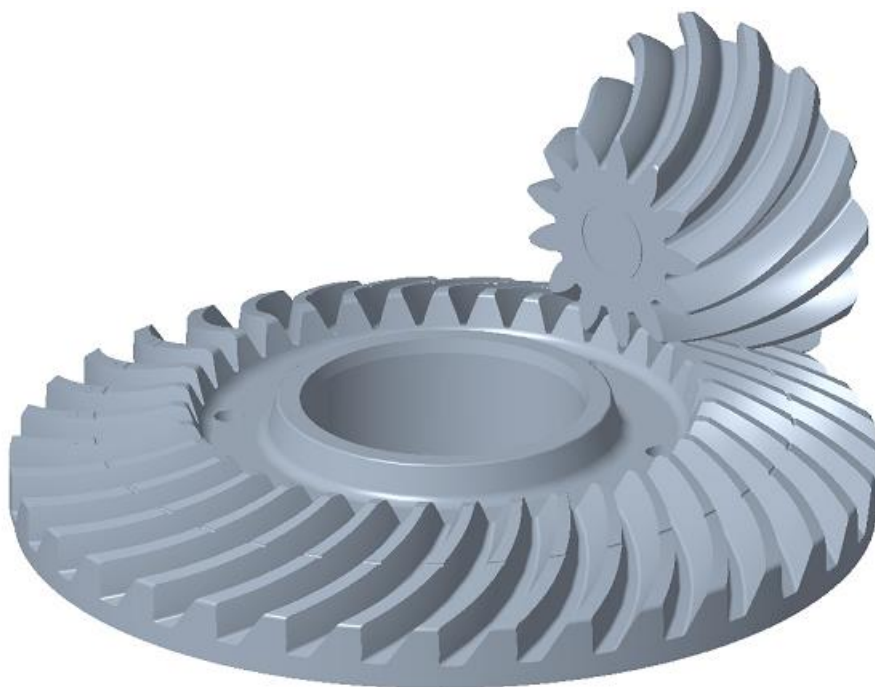
<b>Úvod .....</b>	<b>10</b>
<b>1 Základní pojmy ozubení .....</b>	<b>11</b>
1.1 Popis ozubeného kola .....	11
1.2 Rozdělení ozubených kol .....	12
1.2.1 čelní soukolí .....	12
1.2.2 Šroubová a šneková soukolí .....	13
1.2.3 Kuželová soukolí .....	14
<b>2 Profil ozubení .....</b>	<b>19</b>
2.1 Záběr sdružených profilů .....	19
2.2 Konstrukce spolu-zabírajících profilů .....	19
2.2.1 Metoda přímá .....	20
2.2.2 Metoda nepřímá .....	21
2.3 Evolventní profil .....	22
2.4 Oktoidní profil .....	24
2.5 Sférický evolventní profil .....	26
2.6 Korekce kuželového ozubení .....	30
<b>3 Modelování kuželového ozubení .....</b>	<b>31</b>
3.1 Způsoby modelování profilu ozubení .....	31
3.1.1 Maticová/vektorová metoda .....	31
3.1.2 Geometrická metoda .....	35
3.2 Model ozubení se zakřivenými zuby .....	39
3.2.1 Prodloužená epicykloida .....	40
3.2.2 Modelování v software Creo Parametric .....	42
3.2.3 Vlastnosti parametrického modelu .....	45
<b>Závěr .....</b>	<b>46</b>
<b>Seznam použitých zkratk a symbolů .....</b>	<b>50</b>
<b>Seznam příloh .....</b>	<b>51</b>

## ÚVOD

Ozubená kola jsou důležitou součástí pohyblivých částí strojů a zařízení. Umožňují přenos výkonu, energie a pohybu mezi hřídeli. Z tohoto důvodu jsou klíčovou součástí převodových ústrojí automobilů, výrobních strojů a zařízení i domácích spotřebičů.

Vývoj ozubených kol vycházel z požadavků na dokonalejší a specifičtější typy převodů. Spolu s tím se vyvíjely i rozdílné výrobní metody tak, aby byla kola vyráběna dostatečně efektivně. Pro jednotlivé způsoby výroby se vyvinuly specifické výrobní stroje i nástroje, často jednoúčelové. Součástí procesů návrhu a výroby bylo potřeba simulovat či optimalizovat tvar profilu ozubení tak, aby splňoval požadavky pro konkrétní použití. Pro tento účel jsou vytvářeny modely ozubených kol, které jsou potřebné pro získání představy o chování ozubení za konkrétních zatěžovacích podmínek během záběru.

Na obr. 1 je ukázka modelu kuželového ozubení, generovaného s pomocí parametrického modelu vytvořeného v této bakalářské práci.



*Obr. 1 Soukolí kuželových ozubených kol s parametricky generovaným ozubením*

# 1 ZÁKLADNÍ POJMY OZUBENÍ

Ozubená kola slouží k přenosu mechanické energie ve formě krouticího momentu a otáček. Dochází k tomu při záběru dvou či více ozubených kol, kdy se energie hnacího kola přenáší na kolo hnané. K přenosu výkonu dochází kontaktem dvojic zubů.

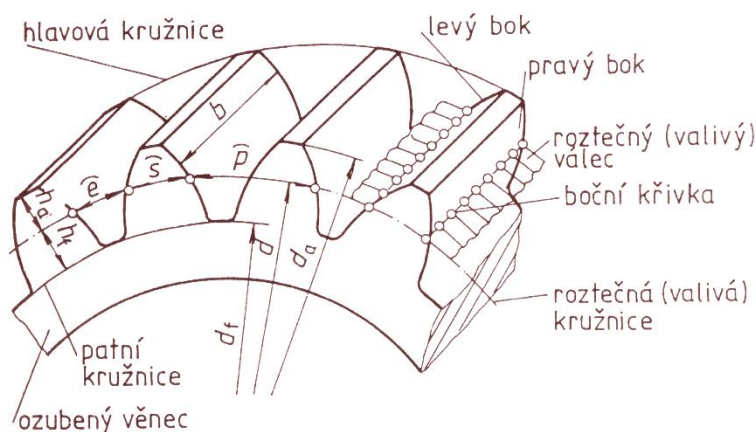
## 1.1 POPIS OZUBENÉHO KOLA

Ozubená kola lze charakterizovat množstvím parametrů. Kola se rozlišují indexy, liché značí kolo hnací, sudé značí kolo hnané. Soukolí charakterizuje převodový poměr  $i$ , rovnice (1). Kolo s menším počtem zubů se obecně nazývá pastorek, druhé pouze kolo. [2]

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1}, \quad (1)$$

kde  $\omega_i$  úhlová rychlost,  $n_i$  otáčky,  $d_i$  valivý průměr.

Na obr. 2 je schematicky znázorněno čelní ozubení s přímými zuby, analogicky se pojmy používají v terminologii kuželových ozubených kol. Zub je vymezen plochami definovanými hlavovou  $d_a$  a patní  $d_f$  kružnicí, a šířkou ozubeného kola  $b$ . Boky zubu mají geometrický tvar dle typu ozubení (nejčastěji evolventního typu). Průsečnice boku zubu s valivou plochou (válec, kužel) je boční křivka zubu. [1]



Obr. 2 Schéma ozubení [2]

Základním rozměrovým parametrem je modul ozubení  $m$ . Definuje se jako poměr rozteče a čísla  $\pi$ , nebo průměr roztečné kružnice  $d$  a počtu zubů  $z$ . Ostatní rozměry jsou pak vyjádřeny určitým násobkem modulu. Hodnoty jsou normalizovány. [1]

$$m = \frac{p}{\pi} = \frac{d}{z}. \quad (2)$$

V případě složitějších typů ozubení (zuby šikmé, zakřivené) rozlišujeme hodnoty parametrů, odvozených z modulu ozubení, na obvodové (index  $t$ ) a (normálové  $n$ ), dle rovin ozubení [8]. Obvodové hodnoty jsou znázorněny v čelní rovině kol (analogicky takto vzniklé ploše

u kuželových kol). Normálové hodnoty jsou znázorněny v rovině kolmé na směr zubu/zubové mezery.

## 1.2 ROZDĚLENÍ OZUBENÝCH KOL

Základní rozdělení ozubených kol je podle polohy os hřídelů, z čehož vychází konstrukce samotného kola. Základní rozdělení je proto:

Rovnoběžné osy – čelní ozubení

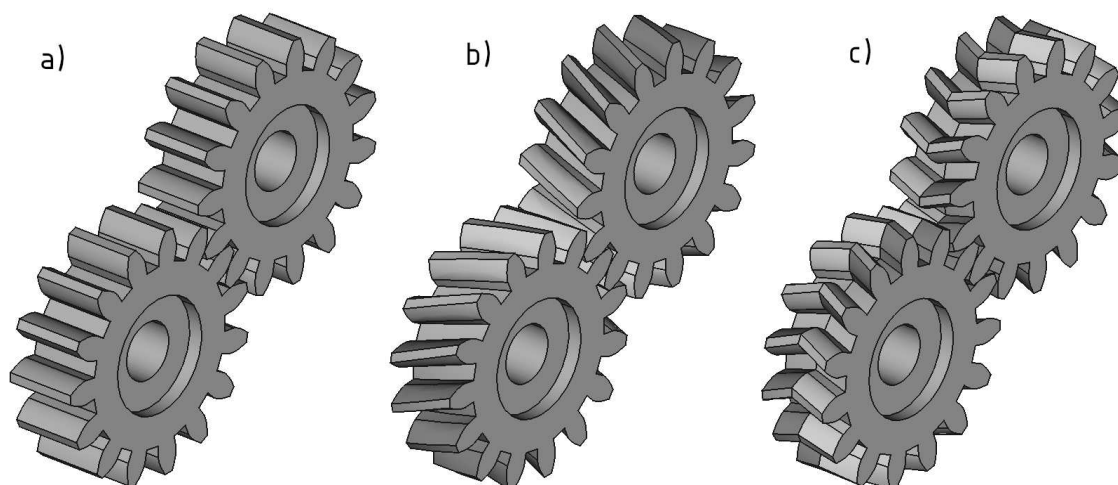
Mimoběžné osy – šroubová a šneková soukolí

Různoběžné osy – kuželové ozubení

Konstrukce jednotlivých typů ozubení se dělí dle tvaru boční křivky zubu. Obecně lze tvary zubů rozdělit na: přímé, šikmé a zakřivené. Samotná konstrukce profilu zubu se liší v rámci výrobních metod a typů jednotlivých kol (téma rozebíráno v následující kapitolách).

### 1.2.1 ČELNÍ SOUKOLÍ

Nejzákladnějším zástupcem ozubených kol jsou čelní ozubená kola. Slouží k přenosu výkonu mezi rovnoběžně uloženými hřídeli. Jednoduchá konstrukce umožňuje snadnou a levnou výrobu. Obecným použitím jsou převodovky automobilů. Historickým vývojem vznikla celá řada konstrukcí čelních ozubených kol. Na obr. 3 je přehled používaných typů čelního ozubení. Rozdělují se dle tvaru zubu na přímé, šikmé a šípové.



Obr. 3 Přehled typů čelního soukolí, dle tvaru zubů a) přímá b) šikmá c) šípová

(generováno s využitím software FreeCAD)

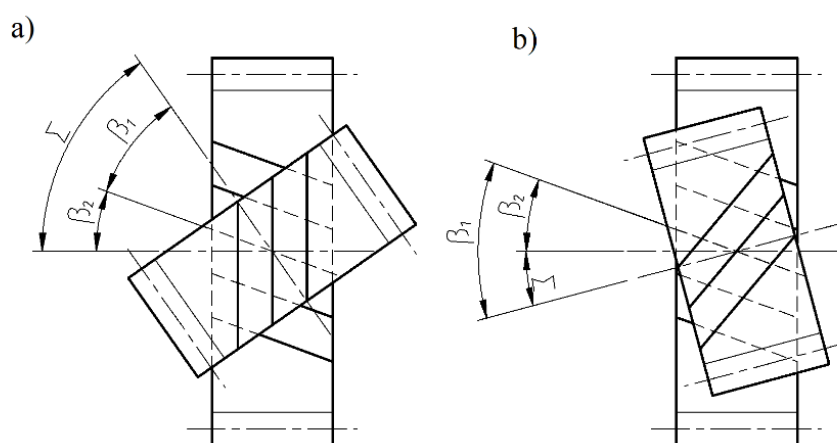
Nejjednodušším typem jsou kola s přímými zuby (Obr. 3a), tvar boční křivky je přímka. Záběr probíhá po šířce plochy zubu. Jejich výhodou je snadná a rychlá výroba, a absence axiálních sil. Záběr je hlučný, protože probíhá po celé délce zubu a dochází k rázům. Namáhání je však rozloženo rovnoměrně. [1]

Kola se šikmými zuby (obr. 3b) mají boční křivku tvaru šroubovice. Při rozvinutí roztečného válce do roviny tvoří přímku. Geometrie vychází z ozubeného hřebenu, u kterého jsou zuby pootočený o určitý úhel. Oproti přímým zubům tak mají plynulejší a tišší záběr, jelikož současně je v záběru více zubových dvojic. Vstup a výstup zubů do záběru je pozvolnější, neprobíhá po celé délce zubů. Výhodou je vyšší únosnost, jelikož část sil je rozložena i do axiálního směru, proto samotné ozubení není tolik namáháno. Z toho plyne nevýhoda větší zátěže ložisek zajišťující uložení hřídelí kol. [1]

Kola se šípovými zuby (obr. 3c) vychází z kol se šikmými zuby. Boční křivka zubu je opět šroubovice, pouze symetrická v rovině kola. Při rozvinutí do roviny je tvar šípový. Výhodou této geometrie proti jednoduchému šikmému ozubení je vyrušení axiálních sil, které by jinak namáhaly soustavu uložení. Nicméně výroba takového kola je složitější, právě kvůli symetrii kola, která brání využití nástrojů hřebenového typu.

### 1.2.2 ŠROUBOVÁ A ŠNEKOVÁ SOUKOLÍ

Šroubová soukolí umožňují přenos výkonu mezi mimoběžnými hřídeli. Teoreticky vhodným tvarem je hyperboloid. Z důvodu obtížné výroby se používá pouze menší část, která se zjednodušuje na válcovou plochu. Jsou případem čelního soukolí, kdy minimálně jedno z kol má šikmé ozubení s boční křivkou zubu tvaru šroubovice, schéma obr. 4. Spoluzabírající kola mají buď stejný směr chodu šroubovice obr. 4a, šroubovice jsou pravotočivé, nebo opačný směr obr. 4b, kdy je šroubovice pastorku levotočivá. [3] Podmínkou správného záběru je, že velikosti normálových modulů  $m_{ni}$  a velikosti úhlů záběru  $\alpha_i$ , jsou shodné pro obě kola. [13]



Obr. 4 Šroubová soukolí – podle [13]

Celkový úhel os  $\Sigma$ , se spočítá pro situaci stejného chodu šroubovice jako rovnice (3), pro opačný chod pak rovnice (4),  $\beta_i$  jsou úhly sklonu šroubovice.

$$\Sigma = \beta_1 + \beta_2, \quad (3)$$

$$\Sigma = \beta_1 - \beta_2. \quad (4)$$

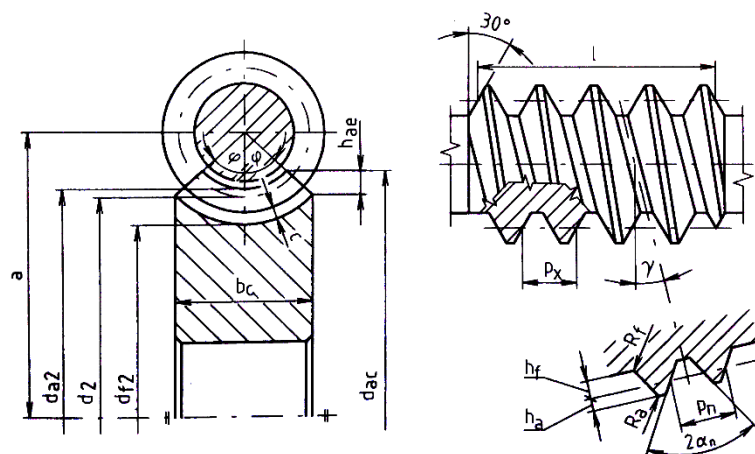
Šroubová soukolí mají menší účinnost a nemohou přenášet velké výkony. Pro snížení tření a zamezení zadírání se volí rozdílné materiály pro spoluzabírající kola. Celkově jsou proto méně efektivní, nežli čelní a kuželová soukolí. [11]

Šneková soukolí, umožňují přenos výkonu mezi pravoúhle uloženými hřídeli. Převod se skládá ze šnekového kola a šneku (hnací kolo). Tvary kol mohou být globoidní, válcové.

Nejčastější varianty šnekových převodů:

- Globoidní kolo – globoidní šnek
- Globoidní kolo – válcový šnek
- Válcové kolo – válcový šnek

Přenos výkonu probíhá smýkáním povrchů zubů, proto při záběru dochází k významným tepelným ztrátám. Kola jsou vyráběna z rozdílných typů materiálů (nejčastěji bronz a ocel). Na obr. 5 je zobrazena situace globoidního kola a válcového šneku, se zakótovanými obecnými rozměry. Šnekové kolo představuje šroub. Výhodou šnekových převodů je možnost dosažení velkých převodových poměrů a tím zmenšení otáček.



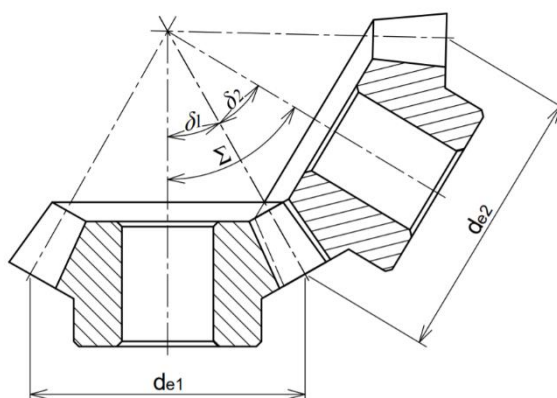
Obr. 5 Základní rozměry šnekového soukolí typu válcový šnek – globoidní kolo [3]

### 1.2.3 KUŽELOVÁ SOUKOLÍ

Slouží k přenosu výkonu mezi různoběžnými hřídeli (výjimkou jsou kuželová hypoidní soukolí). Uplatnění proto nachází například jako součást diferenciálu automobilů. V leteckém průmyslu pak u leteckých turbín, jako přídavné zařízení pro získání přebytečné energie, případně jako forma startéru turbíny, dále pak u pohonů helikoptér. U lodních zařízení se

používají jako součást přídatných pohonů, pro zajištění pohonu lopatek umístěných mimo osu hlavního motoru. [9]

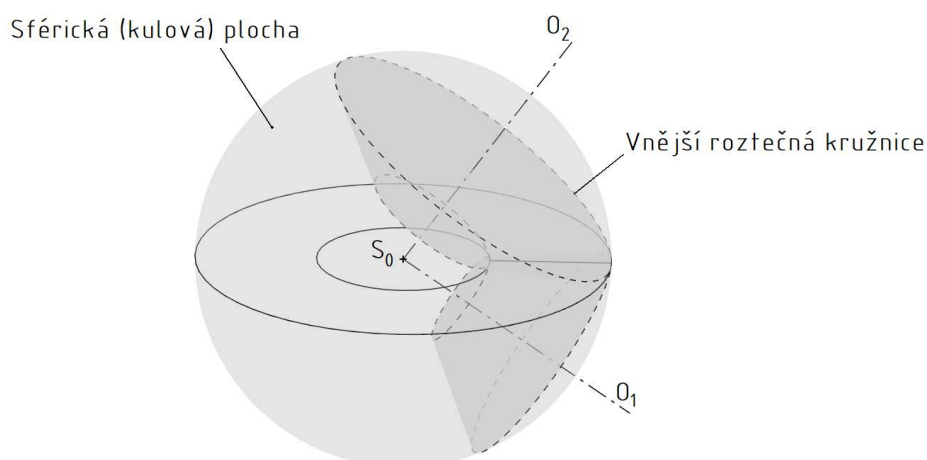
Uspořádání kuželového soukolí je zakresleno ve schématu na obr. 6. Osy kuželových kol svírají úhel  $\Sigma$ , který je součtem velikosti úhlů roztečných kuželů,  $\delta_1$  a  $\delta_2$ . Častým úhlem je  $90^\circ$ , pro pravoúhlý přenos. Ve schématu jsou také zakótovány vnější roztečné průměry  $d_{e1}$  a  $d_{e2}$ .



Obr. 6 Kuželové soukolí

Záběr kuželových kol je oproti čelním kolům komplikovanější. Jelikož dochází k odvalování kuželů se společným středem, dráha záběru je křivka na sférické ploše. Od toho se také odvíjí tvar profilu zubu. Situace je znázorněna na obr. 7, kde jsou zjednodušeně zakresleny dvě spoluzabírající kuželová kola, jejichž osy  $O_1$ ,  $O_2$ , se protínají ve společném bodě  $S_0$ , který je zároveň odpovídá vrcholu roztečných kuželů kol. Při bez-kluzovém odvalování kuželů, vytvoří roztečná kružnice sférický povrch, se středem v bodě  $S_0$ , o poloměru vnější délky površky kuželu. [5]

Mezikružší, stopa vnější a vnitřní kružnice kuželů, odpovídá šířce ozubení a definuje pomyslnou roztečnou rovinu, která se využívá pro znázornění tvarů křivek zubů.

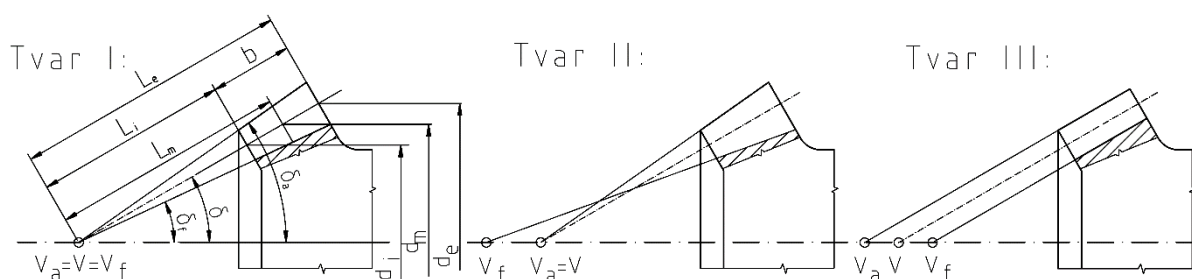


Obr. 7 Valení roztečných kuželů

Jistým způsobem lze čelní kola označit za limitní případ kol kuželových. Při představě vrcholů kuželů umístěných v nekonečnu, osy kol jsou rovnoběžné (setkávají se v nekonečnu) a kuželové plochy se změny na válcové. Tato teorie může být použita při odvozování geometrie tvaru zubů zpětně, tedy z rovinného evolventního profilu čelních kol, na sférický evolventní profil kuželových kol.

Kuželová kola lze rozdělit podle mnoha kritérií, zohledňující tvar zubů a způsoby výroby. [9] Rozdělení podle tvaru věnců, obr. 8, rozlišuje tvary kuželů (hlavový, patní a roztečný) a jejich vliv na výšku zubu.

- Tvar I, vrcholy kuželů se setkávají ve společném bodě, zuby mají proměnlivou výšku po šířce ozubení.
- Tvar II, hlavový a roztečný kužel se protínají ve společném vrcholu, vrchol patního kužele je zvlášť. Zuby mají proměnlivou výšku.
- Tvar III, kužele jsou vzájemně rovnoběžné, výška zubů je konstantní.



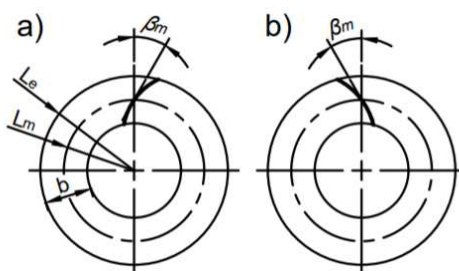
Obr. 8 Tvary věnců kuželových kol – podle [8]

Jednotlivé kužely jsou jednoznačně určeny úhly površek kuželů, úhel patního kuželu  $\delta_f$ , úhel základního kuželu  $\delta$  a úhel hlavového kuželu  $\delta_a$ . Dalšími zakótovanými rozměry jsou délky površek kuželů (vnější  $L_e$ , střední  $L_m$ , vnitřní  $L_i$ ), šířka ozubeného věnce  $b$ , a velikosti jednotlivých průměrů,  $d_i$  vnitřní roztečný průměr,  $d_m$  střední roztečný průměr a  $d_e$  vnější roztečný průměr. Výška zubu může být konstantní, nebo proměnlivá. Konstantní výška zubu je v případě, že hlavový a patní kužel mají při vrcholu stejný úhel. Proměnlivá výška zubu je v případě, že kužely mají při vrcholu jiné velikosti úhlů, tedy výška zubu je menší směrem ke středu kola. [8]

Tvary boční křivky zubu (také nazývané „řídící křivky“ [8]) lze zobrazit jako stopu zubů v roztečné rovině – vzniklé jako mezikruží při volném odvalení kuželů (viz obr. 7). Tak jako u čelních kol válcových existují tři základní tvary zubů přímé, šikmé a zakřivené (spirální). Spirální ozubení je pak dále rozděleno podle typu křivky, kterou může být kruhový oblouk, prodloužená epicykloida, prodloužená hypocykloida a evolventa. [9].

U zakřivených zubů se pak dále rozlišuje ozubení pravé v pohledu z vrcholu kuželu se stáčí ve směru hodinových ručiček obr. 9a, levé opačně obr. 9b. Spoluzabírající ozubení druhého kola má opačný směr. [8] Kolo a pastorek je proto nutné vyrábět rozdílnými nástroji či způsoby upínání, s ohledem na metodu obrábění. Na stejném obrázku je také vyznačen úhel zakřivení křivky zubu  $\beta_m$ , který také patří mezi základní parametry kuželových kol.

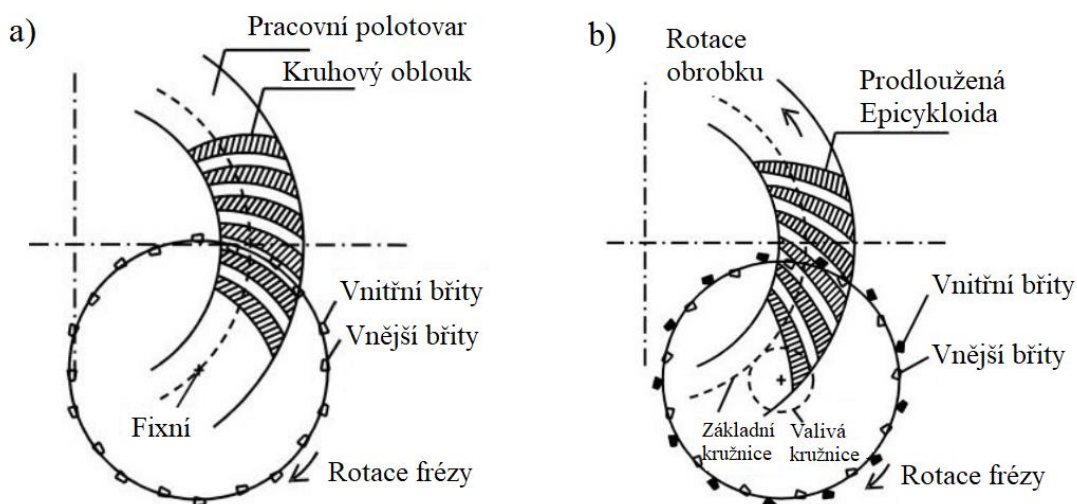




Obr. 9 Směr zakřivených zubů a) pravé, b) levé

Významný vliv na tvar zubů mají použité způsoby výroby. Nejběžnější metodou výroby kuželových kol se zakřivenými zuby je frézování odvalovacím způsobem. To se provádí ve dvou základních variantách (obr. 10) obrábění jednotlivých zubových mezer tzv. přerušovaným odvalováním (metoda Gleason), nebo naopak nepřetržitým odvalováním (metody Oerlikon a Klingelnberg). [7]

Frézovací hlavy bývají osazeny dvojicemi břitů, které současně obrábí obě strany zubové mezery. Výhodou frézovacích hlav je možnost nastavení břitů, čímž lze provádět tvarové a rozměrové modifikace ozubení.



Obr. 10 Způsoby výroby kuželových kol se zakřivenými zuby (přeloženo) [10]

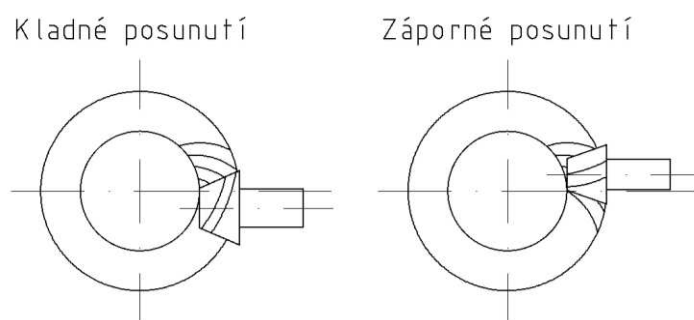
**Přerušovaným odvalováním** (obr. 10a) je obráběna jedna zubová mezera, poté se nástroj přestaví, obrobek se pootočí a pokračuje obrábění následující mezery. Frézovací hlava koná rotační pohyb, tvar zubové mezery je proto kruhový oblouk. [7]

**Nepřetržitým odvalováním** (obr. 10b) je synchronizován pohyb nástroje a obrobku. Odvalováním čelní frézy proto dochází k obrábění několika drážek současně. V roztečné rovině základního kola pak tyto pohyby vytváří buď epicykloidní křivky – cyklo-paloidní způsob, nebo evolventy – paloidní způsob. [9]

Cyklo-paloidní způsob výroby nepřetržitým odvalováním je využíván pro tvorbu pastorku i kola s konstantní výškou zubu. Boční křivkou zubu je prodloužená epicykloida. Metoda využívá dvoudílné frézovací hlavy, přičemž vnitřní bříty slouží k řezání konvexního tvaru povrchu zubu a vnější k řezání konkávního tvaru zubu. [8]

Paloidní způsob, dnes již méně používaný [7], generuje boční křivku zubu jako prodlouženou evolventu. Opět se jedná o nepřetržité odvalování, kde nástroj je odvalovací fréza kuželového tvaru, s řeznými břitzy na povrchu kuželové plochy.

Zvláštní kategorií jsou kola hypoidní. Vzniknou posunutím pastorku o hodnotu kladného, nebo záporného posuvu, takže osy kol již neprocházejí stejným bodem. Kladný posuv je ve směru úhlu natočení šroubovice, záporný pak, v protisměru. Při kladném posuvu jsou hodnoty průměrů pastorku větší ve srovnání s nehypoidním převodem, zároveň je střední úhel šroubovice pastorku větší než kola. Při záporném posuvu se průměr zmenšuje a střední úhel šroubovice má menší hodnotu, ve srovnání s kolem. [9]

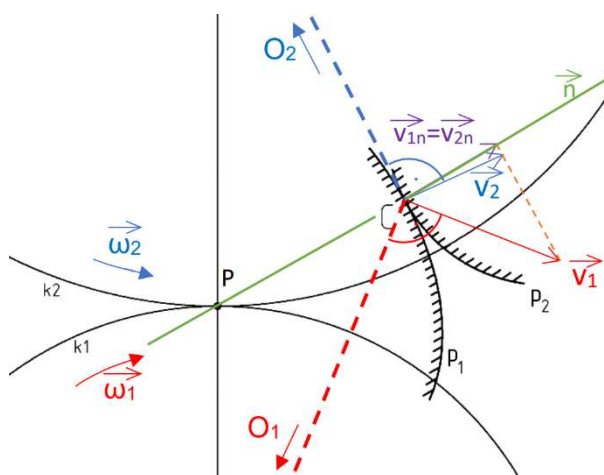


Obr. 11 Znaménková konvence pro hypoidní soukolí

## 2 PROFIL OZUBENÍ

### 2.1 ZÁBĚR SDRUŽENÝCH PROFILŮ

Profily, které mají po celou dobu záběru konstantní převodový poměr, se nazývají sdružené. Neboli splňují tzv. podmínku sdruženosti. [4] Na obr. 2 je záběr obecných rovinných profilů  $p_1, p_2$ , náležící valivým kružnicím  $k_1, k_2$ . Z rovnice (1) vychází, že poměr rychlostí  $\omega_1$  a  $\omega_2$  musí být konstantní. V místě dotyku zubů, bod  $C$ , jsou průměty obvodových rychlostí  $v_1$  a  $v_2$  do společné normály  $n$ , stejné. Zároveň musí po dobu záběru procházet normála  $n$  valivým bodem  $P$ . Pokud jsou splněny zmíněné podmínky, profily jsou sdružené a umožňují konstantní převodový poměr. [1]



Obr. 12 Záběr sdružených profilů

Cílem konstrukce profilu je nalezení profilu, který splňuje podmínku sdruženosti. Ke každému profilu lze vytvořit sdružený profil, ne vždy je však vhodný pro ozubené převody [4]. Historicky se u čelních ozubených kol prosadil profil evolventní, zejména z důvodu snadné výroby.

### 2.2 KONSTRUKCE SPOLU-ZABÍRAJÍCÍCH PROFILŮ

Geometrie sdružených profilů vychází z kinematiky záběru sdružených profilů. Jsou dva základní postupy, jak lze tyto teoretické profily tvořit, metoda přímá a metoda nepřímá. Rozlišují se vstupními podmínkami. U metody přímé je zadán profil a hledá se profil sdružený. U metody nepřímé je profil generován tvořícími křivkami. [4]

Aplikace těchto metod lze nalézt v již existujících profilech ozubení, výrobních nástrojích, případně jako teoretický základ pro další geometrické konstrukce v oblasti ozubení. Popsány jsou rovinné případy, nicméně analogicky lze přistupovat při generování jiných typů ozubení, omezením jsou pouze výrobní možnosti, zda teoretický profil lze efektivně vyrábět.

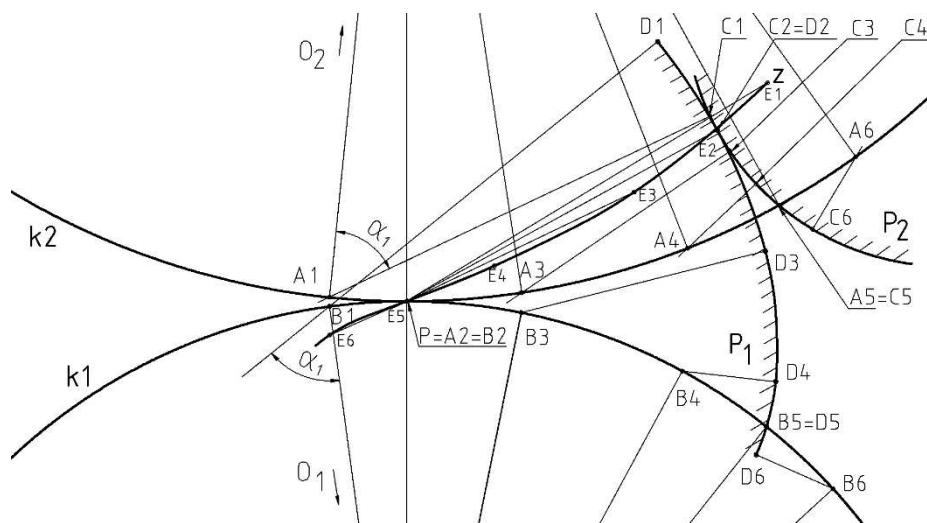
### 2.2.1 METODA PŘÍMÁ

Touto metodou lze z již existujícího profilu (ve formě vhodné křivky, oblouku, přímky či tvaru nástroje) geometricky odvodit profil spoluzabírající. Při záběru profilů dochází k jejich vzájemnému obalování, díky čemuž lze vhodnou volbou jednoho profilu definovat druhý z podmínek záběru sdružených profilů.

Na obr. 13 je zobrazena obecná konstrukce profilu  $p_1$  přímou metodou (výsledek použití ve schématu na obr. 12). Nejdříve jsou určeny parametry valivých křivek (v tomto případě kružnic  $k_1$  a  $k_2$ ) např., z hodnot převodového poměru. Zvolený profil  $p_2$  (obecná křivka), která musí splňovat podmínku, že normála spuštěná z libovolného bodu protíná valivou křivku.

Z vlastností sdružených profilů vyplývá, že normála v bodě kontaktu profilů, protíná valivý bod  $P$  a současně svírá s centrální osou  $O_1O_2$  úhel  $\alpha_i$  (pro přehlednost je ve schématu zakótován pouze pro bod 1). Body na valivých kružnicích, značeny  $A_i$ , jsou průsečíky normál profilu  $p_2$ , s roztečnými kružnicemi. Odpovídající body  $B_i$ , jsou určeny z délky oblouku (odpovídající odvalení kružnic). Na přímky vedenými body  $B_i$ , pod úhlem  $\alpha_i$ , jsou ve vzdálenosti  $A_iC_i$ , sdružené body hledaného profilu  $P_1$ . [4]

Schéma je doplněno dráhou záběru, jejíž body  $E_i$ , které odpovídají okamžikům dotyku bodů profilů, tedy jsou zaznamenány ve vzdálenosti  $A_iC_i$  (respektive  $B_iD_i$ ), pod úhlem  $\alpha_i$  na přímce z valivého bodu  $P$ . [4]



Obr. 13 Konstrukce sdružených profilů přímou metodou – podle [4]

Podobný postup lze provést numericky ve vhodném výpočetním software, je-li profil  $p_2$  matematicky definován (např. parametrickou křivkou nebo přesnými souřadnicemi bodů).

Metoda není ke konstrukci samotného profilu ozubení příliš vhodná kvůli tvarové odlišnosti křivek zadaného a odvozeného profilu (křivky nejsou stejného druhu). Uplatnění metody může být pro odvození tvaru odvalovacího nástroje [4], případně naopak k získání tvaru zubu ze znalosti geometrie nástroje.

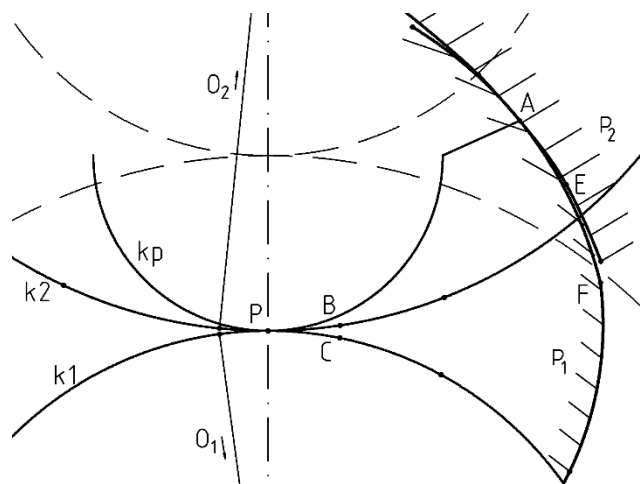
### 2.2.2 METODA NEPŘÍMÁ

Tato metoda slouží ke konstrukci sdružených profilů, jejichž křivky jsou stejného druhu. Což je žádoucí, pokud mají být profily vyráběny stejným tvarem nástroje. Jsou dva přístupy, které buď vedou ke konstrukci **trochoidy** nebo **obálky**.

Trochoidní způsob, vychází z tzv. Camusovy věty, kterou lze volně interpretovat jako situaci tří křivek, dotýkajících se ve společném bodě dotyku, kdy bod vázaný na jednu křivku opíše při valení této křivky po zbylých křivkách sdružené profily na těchto křivkách. [4][6]

Trochoida neboli cyklická křivka, je množina bodů daná tvořící křivkou (hybnou polodií), která se valí po polodii nehybné. Tvořící křivka může být např., kružnice, přímka, či jiná obecná křivka. Na obr. 14 je konstrukce obecných profilů trochoidním způsobem, kdy jsou valivé kružnice  $k_1$ ,  $k_2$  nehybné polodie, zatímco tvořící křivka  $k_p$  polodie hybná. Bod  $A$  je pevně spojen s tvořící křivkou. Při odvalování tvořící křivky po valivých kružnicích, bod  $A$  vykresluje profily  $p_1$  a  $p_2$ . Ve schématu je zakreslena dvojice bodů  $E$ ,  $F$ , které vznikly jako souřadnice bodu  $A$ , při odvalení kružnice  $k_p$  do polohy bodů  $B$  a  $C$ . [4]

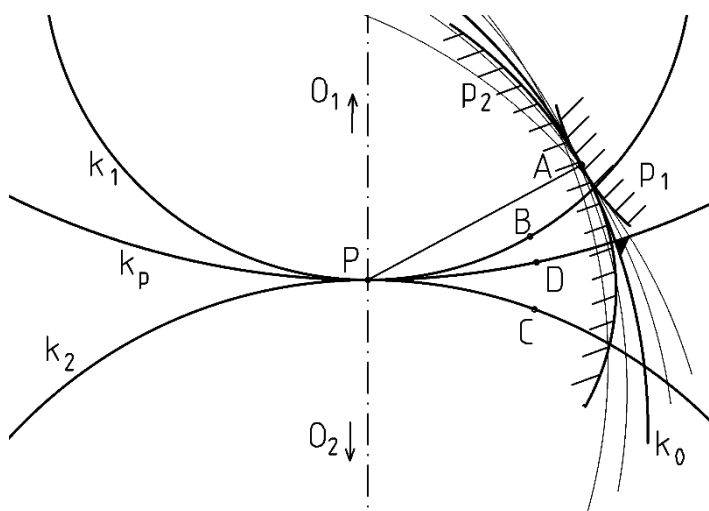
Profily  $p_1$  a  $p_2$  jsou cyklické křivky – trochoidy bodu  $A$ . V případě, že je tvořící křivka kružnice, vzniká cykloidní profil ozubení. Modifikací této metody je pak konstrukce evolventního profilu, kdy tvořící křivka je přímka, ale odvaluje se po kružnici základní (nikoliv valivé), nejedná se proto o přímou aplikaci Camusovy věty. [4]



Obr. 14 Nepřímá metoda – trochoidní způsob – podle [4]

Obálková konstrukce zobecňuje původní Camusovu větu, kdy namísto trajektorie jednoho bodu vznikají profily jako obálky vhodně definované pomocné křivky. Tou může být například geometrie ostří nástroje, které vytváří profil ozubení. Pohyb této křivky pak může být vyjádřen skutečným pohybem nástroje podle odpovídajícího způsobu výroby (např. odvalování nebo hoblování). Na obr. 15 je konstrukce obecných profilů obálkovou metodou. Pomocná křivka  $k_0$ , je spojena s křivkou  $k_p$ , která se odvaluje po křivkách  $k_1$ ,  $k_2$ . Z jednotlivých poloh křivky  $k_0$ , vznikají profily  $p_1$  a  $p_2$ , které jsou obálkami této křivky. Pro profil  $p_2$  jsou zobrazeny polohy křivky  $k_0$ . Při odvalování  $k_1$  po  $k_2$  se profily  $p_1$  a  $p_2$  navzájem obalují. [4]

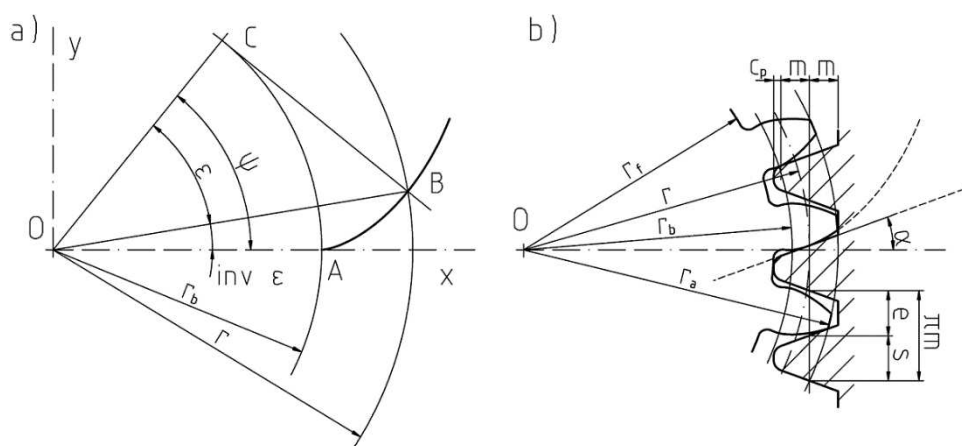
Tento způsob popisuje například výrobu evolventního ozubení čelních kol ozubeným hřebenem, kdy tvar hřebenového profilu odpovídá křivce  $k_0$ .



Obr. 15 Nepřímá metoda – obálkový způsob – podle [4]

## 2.3 EVOLVENTNÍ PROFIL

Obecně hojně používaný profil zubů pro čelní ozubená kola. Nabízí požadované vlastnosti sdružených profilů a zároveň lze efektivně vyrábět. V předešlém textu zmíněné způsoby konstrukce sdružených profilů jsou aplikovány při tvoření evolventního profilu. Na obr. 16 je zobrazení tvoření evolventní křivky, druhá část obrázku je situace generování evolventního profilu zubu, výrobním nástrojem hřebenového typu, včetně popisu základních rozměrových parametrů.



Obr. 16 a) konstrukce evolventní křivky, b) profil ozubeného kola a nástroje

Evolventní křivka, podle obr. 16a, je definována jako trajektorie bodu, který je pevně spojen s přímkou, odvalující se po základní kružnici. Vzdálenost bodu B na přímce, odpovídá délce oblouku, po kterém se přímka poodvalila o úhel  $\psi$ , pro body A, B a C tedy platí rovnice (5).

$$\widehat{CA} = |CB| \quad (5)$$

Základní kružnice je zakótována poloměrem  $r_b$ , tečna k této kružnici je přímka, jejíž bod B, je bodem evolventy. Současně tímto bodem prochází kružnice  $r$  se středem v bodě O. Úhel  $\varepsilon$ , označován také jako tlakový úhel [4], je parametrem evolventní funkce, značeno  $\text{inv } \varepsilon$  (involuta úhlu  $\varepsilon$ ), což lze vyjádřit rovnicemi (6) a (7). [12]

$$\varepsilon = \cos^{-1} \frac{r_b}{r}, \quad (6)$$

$$\text{inv } \varepsilon = \tan \varepsilon - \varepsilon, \quad (7)$$

přičemž jednotky úhlu  $\varepsilon$  pro správný výpočet evolventní funkce jsou v radiánech. Pro  $r$  rovno velikosti poloměru valivé kružnice, je úhel  $\varepsilon$ , úhlem záběru profilu ozubení  $\alpha$  (viz. obr. 16b). Parametrické rovnice souřadnic bodů evolventy pak vychází jako rovnice (8) a (9). [12]

$$x = r \cos(\text{inv } \varepsilon), \quad (8)$$

$$y = r \sin(\text{inv } \varepsilon). \quad (9)$$

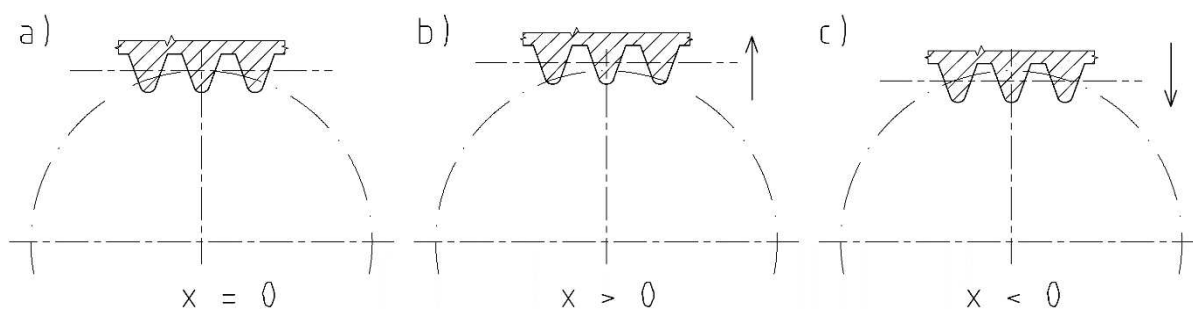
Na obr. 16b je znázorněna geometrie výrobního nástroje, kde jednotlivé parametry odpovídají základnímu profilu ozubení. Poměr pomyslné výšky hlavy a paty je však obrácený, aby mohlo být zrcadlového poměru dosaženo u kola, tj. mezi koly vznikla mezera. Tuto mezeru určuje velikost součinitele hlavové vůle  $c$ , násobící velikost modulu, nejčastěji  $c = 0.25m$ .

Zobrazená situace kolo – nástroj, je bez korekcí, tedy během generování profilu se roztečná přímka nástroje odvaluje po valivé kružnici. Korekce nástroje se používají při nízkém počtu zubů, pro zabránění vzniku podřezání paty zubu. Snahou je, aby ozubená kola splňovala podmínku minimálního počtu zubů, rovnice (10).

$$z_{\min} = \frac{2}{\sin^2 \alpha}, \quad (10)$$

pro hodnotu úhlu záběru  $\alpha = 20^\circ$ , je hodnota minimálního počtu zubů  $z_{\min} = 17$ . Nižší hodnoty lze používat s uvažováním, že může být snížena pevnost zubů. Případně lze využít korekce nástroje, tedy posunutí profilu nástroje tak, aby nedošlo k podřezání zubů. Mimo to, u korigovaného ozubení lze dosáhnout nižší špičatosti zubů, zabránění interference zubů (poloha hrany zubu teoreticky protíná materiál spolu-zabírajícího kola), snížení hlučnosti a vibrací, a zlepšení účinnosti a únosnosti. [15]

Korekce posunutím nástroje, může být kladná, obr. 17b, nebo záporná, obr. 17c. Používá se součinitel  $x$ , který se násobí velikostí modulu. Kladná korekce posouvá nástroj směrem od valivé kružnice, záporná korekce dovnitř.

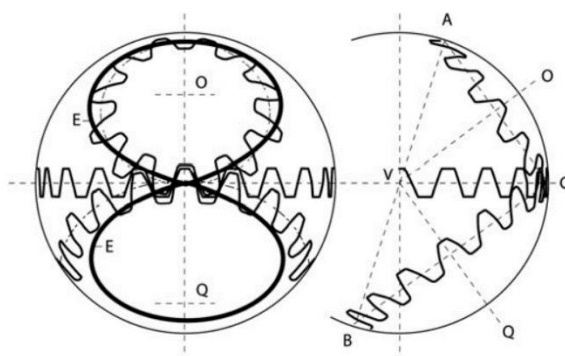


Obr. 17 a) bez korekce, b) kladná korekce, c) záporná korekce

## 2.4 OKTOIDNÍ PROFIL

Kuželová kola nemají na rozdíl od čelních ozubených kol standardizovaný evolventní profil, místo toho se v terminologii kuželových kol používá profil oktoidní. Generování tvaru tohoto profilu probíhá, obdobně jako v případě čelních kol, imaginárním nástrojem hřebenového typu. Jedná se o základní rovinné kolo (případně výrobní rovinné kolo) [5] s tvarem profilu zubů odpovídající geometrii základního profilu ozubení. Boky zubů základního rovinného kola jsou tedy rovinné, v normálovém řezu ve tvaru lichoběžníku. [9] Pomyslným odvalováním kuželů po rovinném kole, ležícím v roztečné rovině, vzniká výsledný tvar zubů jako obálka jednotlivých poloh základního profilu rovinného kola.

Název profilu vychází z tvaru záběrové křivky. Z důvodu kuželové geometrie, záběrová křivka není přímkou, tak jako v rovinném případě čelního ozubení, ale křivkou ve tvaru čísla „8“, promítnutá na sférickou plochu. [17] Přestože se liší tvar záběrové křivky, je záběr oktoidních profilů kinematicky správný. [9]



Obr. 18 Zobrazení záběrové křivky pro oktoidní profil ozubení [9]

Oktoidní profil kuželového ozubení lze matematicky popsat pomocí maticových a vektorových operací, kdy jsou jednotlivé povrchy zubů určeny souřadnicemi bodů určitého souřadného systému. Matematický model je založen na transformaci souřadnic bodů zubů rovinného kola, při pomyslném odvalování kuželového kola.

Postup níže představuje dílčí kroky generování oktoidního profilu podle [20]. Nutno poznamenat, že uvedený postup generuje kuželové ozubení s přímými zuby.



Základem tohoto výpočtového modelu jsou roztečný kužel a roztečná rovina, definované v základním souřadném systému označeném  $S_0$ , se středem odpovídající sféře opsané při odvalování kuželu po roztečné rovině. Rovinné kolo je popsáno v souřadnicovém systému  $S_{cg}(x, y, z)$ , ve kterém je popsána geometrie ozubení rovinného kola parametricky rovnicí (11), odvozenou ze souřadného systému  $S_0$ . [20]

$$\mathbf{r}_{cg}(\rho, \varphi) = \begin{bmatrix} \rho(\pm \cos \varphi \sin(\frac{t_p}{2}) \mp \sin \alpha \sin \varphi \cos(\frac{t_p}{2})) \\ \rho(\pm \cos \varphi \cos(\frac{t_p}{2}) \mp \sin \alpha \sin \varphi \sin(\frac{t_p}{2})) \\ -\rho(\sin \varphi \cos \alpha) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

kde  $\rho$  je poloměr sférické plochy,  $\varphi$  je parametr natočení v rozmezí hlavové a patní části rovinného kola (velikost úhlu je stejná jako v případě sférické evolventy na obr. 19), úhel  $\alpha$  značí úhel záběru a  $t_p$  je tloušťka zubu základního rovinného kola. Znaménka určují pravý (horní index) a levý (dolní index) bok zubu. [20]

Generování profilu zubů kuželového kola probíhá transformací základního rovinného kola. Kuželové kolo je definováno v souřadném systému  $S_i$ , kde  $i$  je index kola. Při transformaci jsou používány pomocné souřadné systémy  $S_j, S_k, S_l$ . Oktoidní profil je parametricky určen rovnicí (12). [20]

$$\mathbf{r}_i(\rho, \varphi, \psi_i) = \mathbf{M}_{il}(\psi_i) \mathbf{M}_{lk} \mathbf{M}_{kj} \mathbf{M}_{jcg}(\psi_{cg}(\psi_i)) \mathbf{r}_{cg}(\rho, \varphi), \quad (12)$$

jednotlivé matice transformace jsou rozepsány v rovnicích (13)-(16). [20]

$$\mathbf{M}_{il}(\psi_i) = \begin{bmatrix} \cos \psi_i & \sin \psi_i & 0 & 0 \\ -\sin \psi_i & \cos \psi_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$\mathbf{M}_{lk} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$\mathbf{M}_{kj} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \delta_i & -\cos \delta_i & 0 \\ 0 & \cos \delta_i & -\sin \delta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$\mathbf{M}_{jcg}(\psi_{cg}(\psi_i)) = \begin{bmatrix} \cos \psi_{cg} & \sin \psi_{cg} & 0 & 0 \\ -\sin \psi_{cg} & \cos \psi_{cg} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

kde úhel  $\delta_i$  je úhel roztečného kuželu, úhel  $\psi_{cg}$  představuje natočení základního rovinného kola, úhel  $\psi_i$  je úhel natočení generovaného kuželového kola (kolem vlastní osy). Vzájemný vztah mezi  $\psi_{cg}$  a  $\psi_i$ , popisuje rovnice (17). [20]

$$\psi_{cg}(\psi_i) = \frac{Z_i}{Z_{cg}} \psi_i, \quad (17)$$

kde  $Z_i$  je počet zubů generovaného kola,  $Z_{cg}$  je počet zubů rovinného kola.

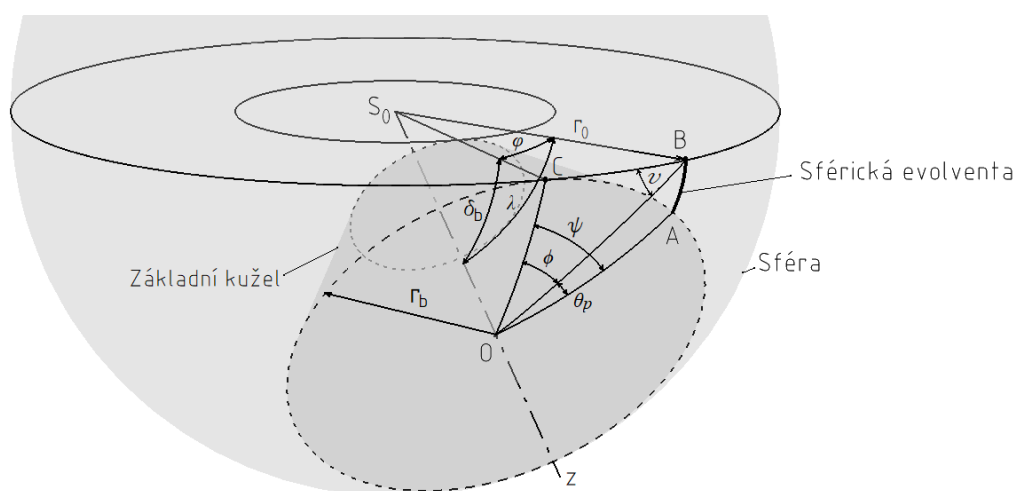
Tento způsob generování profilu lze provádět za pomoci vhodného výpočetního softwaru umožňujícího provádění operací s maticemi a vektory. Z důvodu velkého počtu proměnných a potřebných iterací, je tento profil obtížné generovat nástroji středních CAD software (typu Creo Parametric).

## 2.5 SFÉRICKÝ EVOLVENTNÍ PROFIL

Pro zachování pozitivních charakteristik evolventního profilu lze pro matematický model využít sférické evolventní funkce. Tento profil je pouze teoretický, vychází z kinematiky pohybu kuželových kol, ale běžnými výrobními metodami se z důvodu nízké efektivity nevyrábí. Nicméně, s rozvojem aditivních technologií se zpřístupňují možnosti použití právě sférického evolventního profilu. [25]

Tvar sférické evolventy lze získat přístupem založeným na sférické trigonometrii – geometrická metoda, nebo metodou transformace souřadnic bodu – maticová metoda. [20][26]

Přístupem sférické trigonometrie se využívá podobnosti kuželových a čelních válcových kol. Konstrukce 3D sférické evolventní křivky je ukázána na obr. 19. Sférická evolventa vzniká jako trajektorie bodu B, spojeného s křivkou, která se odvaluje po kružnici základního kuželu, poloměru  $r_b$ . Velikost odvalení, podobně jako v případě rovinném, určuje polohu tvořícího bodu B. [20]



Obr. 19 Princip generování sférické evolventy – podle [20]

Velikosti odvalených oblouků jsou stejné, podobně jako v případě rovinné evolventy, podle rovnice (18).

$$\widehat{CA} = \widehat{CB}. \quad (18)$$

Podobnost s rovinným případem evolventy lze nalézt i u geometrických charakteristik, kdy velikost odvalení kuželu z výchozí polohy (bod A totožný s bodem B), odpovídá úhlu  $\psi$ , tím vzniklý úsek sférické evolventy z bodu A k B vyznačuje úhel  $\theta_p$ .

Z goniometrických vlastností úhlů  $\theta_p$ ,  $\phi$ ,  $\varphi$ ,  $\delta_b$  a poloměru teoretické sféry,  $r_0$ , lze odvodit rovnici (19). [20]

$$\theta_p = \frac{\varphi}{\sin \delta_b} - \phi. \quad (19)$$

Aby bylo možné rovnici použít, tak jako v rovinném případě, pro získání souřadnic bodů sférické evolventy, je nutné vyjádření úhlu  $\varphi = f(\phi, \delta_b)$ . [20] To lze dokázat pomocí vztahů sférické trigonometrie. Úhly  $\delta_b$ ,  $\lambda$  a  $\varphi$  vytváří sférický trojúhelník  $\triangle OCB$ , ve kterém platí věta kosinová (rovnice obecně (20) [21], s dosazením (21)) a věta sinová (rovnice obecně (22) [21], s dosazením (23)). U kosinové věty jsou použitelné kombinace odpovídající danému úhlu [21].

$$\cos c = \cos b \cos o + \sin b \sin o \cos C, \quad (20)$$

$$\cos \lambda = \cos \varphi \cos \delta_b + \sin \varphi \sin \delta_b \cos \frac{\pi}{2}, \quad (21)$$

$$\frac{\sin C}{\sin c} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin O}{\sin o}, \quad (22)$$

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\sin \lambda} = \frac{\sin v}{\sin \delta_b} = \frac{\sin \phi}{\sin \varphi}, \quad (23)$$

kde při obecném vyjádření, velká písmena značí úhel při vrcholu [rad] a malá písmena délku oblouku.

Z rovnic (20) až (23), lze úpravami získat rovnici (24), pro úhel  $\varphi$ . [20]

$$\varphi = \tan^{-1}(\sin \delta_b \tan \phi). \quad (24)$$

Substitucí rovnice (24), do rovnice (19) je získána rovnice (25), která je vyjádřením podobná rovinnému případu, rovnici (7), kterou lze považovat za sférickou evolventní funkci. [20]

$$\theta_p = \frac{\tan^{-1}(\sin \delta_b \tan \phi)}{\sin \delta_b} - \phi. \quad (25)$$

Poslední neznámou pro získání prostorových souřadnic, je úhel  $\lambda$ , který se počítá rovnicí (26), opět po úpravách předešlých vztahů [20].

$$\lambda = \tan^{-1} \left( \frac{\tan[(\theta_p + \phi) \sin \delta_b]}{\sin \phi \cos \delta_b} \right) - \phi. \quad (26)$$

Sférickou evolventu lze tímto způsobem vykreslit v souřadném systému  $S_0(x_0, y_0, z_0)$ , počátek  $S_0$  leží ve středu sféry, osa  $z_0$  je osou kuželového kola, osa  $y_0$  je orientována podle průmětu OA do plochy kolmé k ose  $z$  a procházející bodem  $S_0$ . [20]

Sférická evolventa, vyjádřená v souřadném systému  $S_0$ , jako poloha bodu B na sférické ploše o poloměru  $r_0$ , je vyjádřena pomocí rovnice (27). [20]

$$\mathbf{r}_0^{(B)} = \begin{bmatrix} \mp r_0 \sin \lambda \cos \theta_p \\ r_0 \sin \lambda \cos \theta_p \\ r_0 \cos \lambda \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

kde znaménko v prvním řádku určuje pravý směr (-) a levý směr (+) generování sférické evolventy.

Metodou transformace souřadnic je sférická evolventa generována odvalováním vnější kružnice mezikružící (z obr. 19), přičemž se jako výchozí souřadný systém uvažuje systém pevně spojený právě s touto kružnicí a generujícím bodem B. Série maticových transformací vede k získání souřadnic bodu B v souřadném systému  $S_0$ , rovnice (28). [20] Maticové transformace jsou naznačeny kapitole 3.1.2, kde jsou rozšířeny pro získání tvaru zakřivených zubů (28).

$$\mathbf{r}_0^{(B)} = \begin{bmatrix} r_0(\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \sin \delta_b) \\ r_0(\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \sin \delta_b) \\ r_0(\cos \varphi \cos \delta_b) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

přičemž velikost úhlu  $\varphi$ , lze vyjádřit rovnicí (29). [20]

$$\varphi = \psi \sin \gamma_b. \quad (29)$$

Výsledný evolventní profil je stejný pro obě metody generování, rozdílem je pouze způsob výpočtu. Jako ukázka aplikace generování sférické evolventy bylo vytvořeno zjednodušené kuželové ozubené kolo s přímými zuby v software Creo Parametric. Povrchy zubů vychází ze základního kuželu, není tedy modelována patní část. Zvolené a vypočtené parametry kola ukazuje tabulka 1, přičemž jsou předpokládány nulové hodnoty posunutí základního profilu.

Tabulka 1 Ukázkové parametry zjednodušeného sférického evolventního ozubení

Zvolené parametry	Hodnota	
Počet zubů	$z_1 = 20$	$z_2 = 40$
Obvodový modul	$m_{te} = 6$	
Úhel záběru	$\alpha_t = 20^\circ$	
Šířka ozubení	$b = 30 \text{ mm}$	
Úhel os	$\Sigma = 90^\circ$	
Vypočtené parametry pastorku		
Úhel roztečného kuželu	$\delta_1 = 26.565^\circ$	
Úhel základního kuželu	$\delta_b = 24.850^\circ$	
Délka vnější površky	$L_e = 134.164 \text{ mm}$	
Šířka zubu (roztečná)	$s_e = 9.424 \text{ mm}$	
Výška hlavy zubu	$h_{ae1} = 7.5 \text{ mm}$	
Výška paty zubu	$h_{fe1} = 6 \text{ mm}$	

K výpočtu základních parametrů bylo použito rovnic (30)[13], (31) [20], (32) až (35) [8]

$$\delta_1 = \tan^{-1} \left( \frac{z_1}{z_2} \right), \quad (30)$$

$$\delta_b = \sin^{-1}(\cos \alpha_t \sin \delta_1), \quad (31)$$

$$L_e = 0.5m_{te}z_c = 0.5m_{te}\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad (32)$$

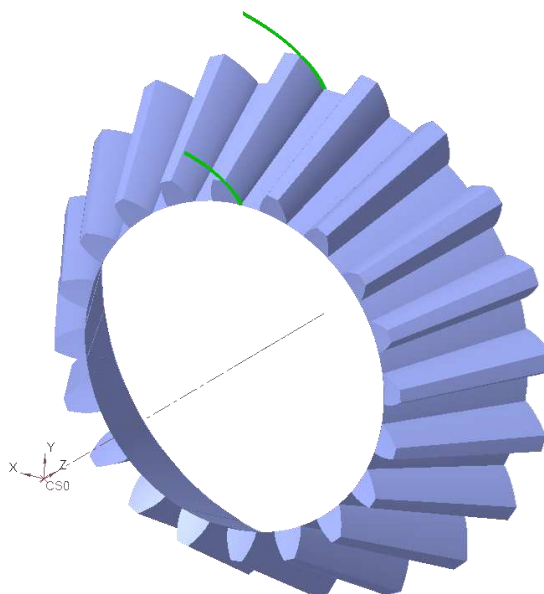
$$s_e = (0.5\pi + 2x \tan \alpha_t + x_\tau)m_{te}, \quad (33)$$

$$h_{ae1} = (h_a^* + x)m_{te}, \quad (34)$$

$$h_{fe1} = (h_a^* + c - x)m_{te}, \quad (35)$$

kde  $c$  je hodnota vůle ozubení (obvykle  $c = 0.25$ ) a  $h_a^*$  součinitel výšky zubu (obvykle  $h_a^* = 1$ ).

Získané sférické evolventní ozubení na povrchu základního kuželu je zobrazeno na obr. 20, v souřadném systému  $S_0(x, y, z)$ , přičemž jsou zde vyznačeny sférické evolventy na počátku a konci boku zubu, definující profil plochy zubu.



Obr. 20 Sférický evolventní profil – ozubení kuželové přímé, generované na základním kuželu

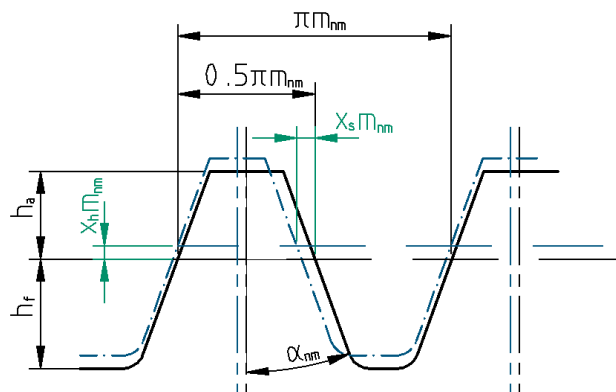
Samotná sférická evolventa však netvoří celkový tvar zubu. Používá se proto představa rovinného kola, které umožňuje modelování celého profilu, podobně jako v případě oktoidního profilu, přičemž profil rovinného kola je mírně odlišný. Použití rovinného kola, případně výrobního rovinného kola je početně náročnější, obvykle řešením diferenciálních rovnic [25], proto tento postup není vhodný pro parametrické modelování v CAD software.

Rozdíly geometrií sférického evolventního profilu a oktoidního profilu pro přímé kuželové ozubení se pohybují v řádech  $\mu\text{m}$ . Z hlediska tvaru je v horní části zubu oktoidní profil užší, zatímco v patě zubu je oktoidní profil širší. [20]

## 2.6 KOREKCE KUŽELOVÉHO OZUBENÍ

U kuželového ozubení se používají posunutí základního profilu výškové a obvodové. Používají se podobně jako v případě ozubení čelních, k zabránění podřezání, zvýšení pevnosti, nebo zamezení špičatosti zubů. [9] Pro zakřivené ozubení je hodnota obvykle definována v normálové rovině zubu – tedy pro nastavení polohy nástroje. Na obr. 21 je zobrazeno posunutí základního profilu kombinující výškové i obvodové (čerchovaně), vzhledem k původnímu nekorigovanému profilu (tučně).

Spoluzabírající kola mají obvykle posunutí stejné hodnoty, s opačnými znaménky, tedy například kladné posunutí pro pastorek a stejně velké, záporné pro kolo.



Obr. 21 Posunutí základního profilu – výškové a obvodové – podle [7][9]

Obvodové posunutí je získáno polohováním nožů frézovací hlavy a tím změny velikosti zubové mezery. Lze takto dosáhnout větší tloušťky zubu a tím vyšší pevnosti zubu. Nevýhodou tohoto řešení je větší koncentrace napětí v místech zaoblení patní oblasti, z důvodu menšího zaoblení nástroje a tím snížení pozitivního efektu. Změna tloušťky zubu obvodovým posunutím je vyjádřena součinitelem tloušťky zubu  $x_s$ . [9]

Velikost výškového posunutí  $x_h$ , ovlivňuje tvar zubu pro zabránění podřezání zubů, nebo v opačném případě zabránění špičatosti. [9] Přes úhel záběru  $\alpha_n$ , ovlivňuje výpočet tloušťky zubu.

Tloušťka zubu v roztečné rovině, se započítáním korekcí, lze získat rovnicí (33).

$$s_m = (0.5\pi \pm 2x_h \tan \alpha_t \pm x_s)m_{nm}, \quad (36)$$

kde znaménko rozlišuje kladné a záporné hodnoty posunutí.

## 3 MODELOVÁNÍ KUŽELOVÉHO OZUBENÍ

### 3.1 ZPŮSOBY MODELOVÁNÍ PROFILU OZUBENÍ

Na rozdíl od čelního ozubení, nemají kuželová kola přesný evolventní tvar zubu. Jsou totiž významněji ovlivněny způsobem výroby. Každá výrobní metoda umožňuje výrobu jiného typu kol, jinými nástroji, a proto se i liší přístup při konstrukci a modelování daného kola. [21]

Jelikož jsou kola vyráběna specifickými metodami, jedním ze způsobů matematického modelování, je sestavení rovnic transformace polohy nástroje, pomocí maticových či vektorových operací, od toho maticová (vektorová) metoda. Jiným přístupem je sestavení teoretického modelu za pomoci geometricky definovaných křivek, například sférická evolventa či oblouk, proto nazýváno geometrická metoda. [26] Dříve zmíněné konstrukce profilů (sférický evolventní a oktooidní) jsou konkrétními aplikacemi těchto metod.

#### 3.1.1 MATICOVÁ/VEKTOROVÁ METODA

Matematický model povrchu zubu odpovídá trajektorii řezné části nástroje během obráběcího procesu. Pro každý způsob obrábění je proto nutné sestavení jiných rovnic matematického modelu. Například pohyb nástroje metodou Gleason, po kruhovém oblouku, je popsán jinými rovnicemi, než pohyb nástroje výrobní metody Oerlikon nebo Klingelnberg. S ohledem na výpočetní možnosti nejsou v matematických modelech obvykle zahrnuty dokončovací operace, ani stav záběhu ozubení, tedy model odpovídá teoreticky přesně vyrobenému ozubení, výše zmíněnými způsoby výroby. Postup byl již naznačen v kapitole 2.4, pro modelování oktooidního profilu přímého kuželového ozubení, hlavní rozdíl je ve způsobu generování ozubení rovinného kola, kdy křivka zubu je prodloužená epicykloida.

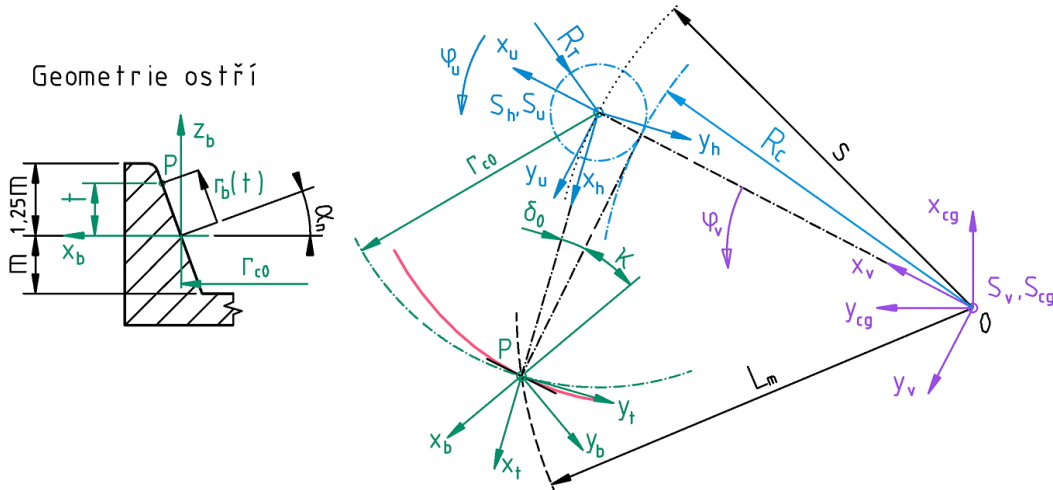
Pro zjednodušení zápisu do některých výpočetních typů softwarů se používá vektorový zápis, tedy vektorová metoda, která namísto transformačních matic, provádí transformace jednotlivých vektorů. Vektorová metoda nevyužívá souřadných systémů, v základu je však stále odvozena z kinematiky obrábění, jedná se tedy o jiný typ zápisu. [26]

Plocha boku zubu generovaného maticovou metodou je určena souřadnicemi generujícího bodu značeného  $P$ , který představuje bod ostří nože. Poloha tohoto bodu je řízena maticovými transformacemi, odvozenými z pohybů nástroje a kola během obráběcího procesu. Při obrábění způsobem plynulého odvalování, lze pohyb frézovací hlavy rozdělit na dvě současně probíhající rotace. Pomocné souřadné systémy umožňují tento pohyb vyjádřit maticemi rotace. Takto je docíleno geometrie rovinného kola, získaného v roztečné rovině. Jelikož při obrábění je současně s pohybem nástroje otáčeno obráběné kolo, je tento pohyb zahrnut do rovnic transformace. Tím je ozubení z rovinného kola přeneseno na kuželové kolo. V souřadném systému kola  $S_i(x, y, z)$  lze ozubení generované maticovou metodou vyjádřit rovnicí (37), jako souřadnice vektoru  $\mathbf{r}_i$ . Souřadný systém je umístěn ve vrcholu kuželu a orientován tak, že osa  $z$  je osou kuželu směrem od vrcholu. [28]

$$\mathbf{r}_i(t_i, \varphi_{ui}, \psi_{cgi}) = \mathbf{M}_{iw}(\psi_{cgi})\mathbf{M}_{wm}\mathbf{M}_{mcg}(\psi_{cgi})\mathbf{M}_{cgv}(\varphi_{ui})\mathbf{M}_{vu}\mathbf{M}_{uh}(\varphi_{ui})\mathbf{M}_{ht}\mathbf{M}_{tb}\mathbf{r}_b(t_i), \quad (37)$$

kde obecně libovolná matice  $\mathbf{M}_{ij}(k)$  je transformace ze souřadného systému  $i$  do souřadného systému  $j$ , v závislosti na parametru  $k$ . Jednotlivé členy rovnice odpovídají jednotlivým částem obráběcího procesu a jsou popsány v následujícím textu.

Na obr. 22 jsou vyznačeny souřadné systémy, generující ozubení rovinného kola. Symboly a označení jsou použity v následujícím textu. Souřadné systémy  $S_b$ ,  $S_t$ ,  $S_h$  a  $S_v$  popisují geometrii a kinematiku nástroje. Ostří nože je definováno v souřadném systému  $S_b$  vektorem  $r_b(t)$ , kde  $t$  je parametry hrany ostří. [28] Tvary ostří mohou být různé, od nejjednoduššího provedení přímky (na obrázku), oblouku nebo paraboly. [27]



Obr. 22 Souřadné systémy generující rovinné ozubení a parametry ostří nástroje – podle [28]

Geometrie ostří je polohována natočením souřadného systému  $S_b$  vzhledem k pomocnému souřadnému systému  $S_t$ . Velikost otočení kolem osy  $z_t$  je rovna součtu úhlů  $\delta_0$  a  $\kappa$ . Odpovídající matice transformace je zapsána rovnicí (38). [28]

$$M_{tb} = \begin{bmatrix} \cos(\delta_{0i} + \kappa_i) & -\sin(\delta_{0i} + \kappa_i) & 0 & 0 \\ \sin(\delta_{0i} + \kappa_i) & \cos(\delta_{0i} + \kappa_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (38)$$

kde úhel  $\delta_0$  odpovídá natočení roviny ostří tak, aby byla kolmá ve směru křivky zubu, tedy podél spojnice generujícího bodu P a okamžitého středu otáčení malé kružnice nástroje. Úhel  $\kappa$  je natočení roviny ostří nástroje oproti nulové poloze, tedy za účelem modifikací povrchu ozubení. [28]

Vzdálenost polohy nože od osy frézovací hlavy je popsána jako vzdálenost souřadného systému  $S_t$  od souřadného systému frézovací hlavy  $S_h$ . Matematicky znázorněno transformační maticí jako translace v ose  $x$ , v rovnici (39). [28]

$$M_{ht} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r_{c0} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (39)$$

kde  $r_{c0}$  je jmenovitý poloměr frézovacího nástroje.

Vlastní osa frézovací hlavy, reprezentována souřadným systémem  $S_h$ , se pohybuje ve vzdálenosti poloměru  $s$ , v závislosti na poloze pomocného souřadného systému  $S_u$ . Samotná rotace nástroje kolem vlastní osy, je znázorněna otáčením souřadného systému  $S_h$  kolem osy  $z_u$ ,



pomocného souřadného systému  $S_u$ . Ve výchozí poloze jsou souřadné systémy pootočený o velikost pravého úhlu, proto k úhlu natočení  $\varphi_u$  je v rovnici přičítána hodnota  $\pi/2$ . Matice transformace rotace nástroje je psána v rovnici (40). [28]

$$\mathbf{M}_{uh}(\varphi_{ui}) = \begin{bmatrix} \cos\left(\varphi_{ui} + \frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\varphi_{ui} + \frac{\pi}{2}\right) & 0 & 0 \\ \sin\left(\varphi_{ui} + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\varphi_{ui} + \frac{\pi}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (40)$$

Kombinací předešlých pohybů je získána kruhová dráha ostří nože. Současně s rotací je řešen pohyb nástroje po kruhové dráze ve vzdálenosti  $s$ . Pomocný souřadný systém  $S_u$  je maticí transformace vázán k souřadnému systému  $S_v$  v rovnici (41). [28]

$$\mathbf{M}_{vu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (41)$$

kde  $s$  je velikost radiálního vyložení nástroje.

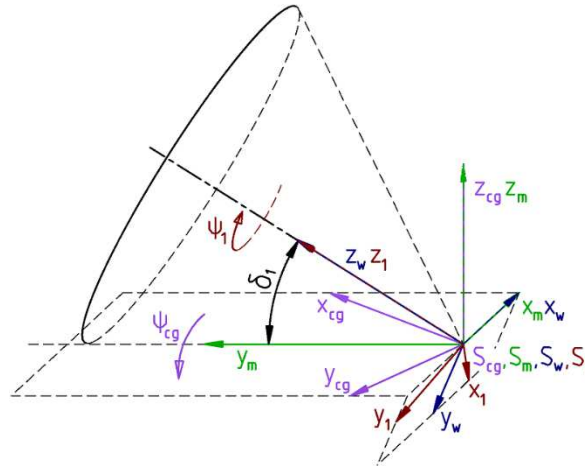
Pro dosažení valivého pohybu nástroje, je souřadný systém  $S_v$  otáčen o velikost úhlu  $\varphi_v$  okolo osy  $z_{cg}$ . Velikosti pootočení  $\varphi_u$  a  $\varphi_v$  v poměru velikosti valivých kružnic  $R_T$  a  $R_C$ . Transformace je řízena maticí v rovnici (42). [28]

$$\mathbf{M}_{cgv}(\varphi_{ui}) = \begin{bmatrix} \cos\left(\varphi_{ui} \cdot \frac{R_T}{R_C}\right) & -\sin\left(\varphi_{ui} \cdot \frac{R_T}{R_C}\right) & 0 & 0 \\ \sin\left(\varphi_{ui} \cdot \frac{R_T}{R_C}\right) & \cos\left(\varphi_{ui} \cdot \frac{R_T}{R_C}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (42)$$

kde poměr velikostí valivých kružnic  $R_T$  a  $R_C$  lze získat kombinací rovnic (59) a (60). [18]

Použitím předešlých matic, rovnice (38) až (42), jsou získány souřadnice povrchu ozubení rovinného kola v souřadném systému  $S_{cg}$ . V následující části jsou zbylé transformace, které vedou k vyjádření ozubení v souřadném systému kola  $S_i(x, y, z)$ . Na obr. 23 jsou zobrazeny souřadné systémy a pohyby konané rovinným kolem a kuželovým kolem při procesu generování ozubení. Zobrazeno je schéma pro generování ozubení pastorku, oproti kolu se liší směry souřadných systémů  $S_w$  a  $S_i$ , jelikož jsou řízeny směrem úhlu  $\delta_i$ . Osy z souřadných systémů  $S_{cg}$  a  $S_m$  zůstávají shodně orientovány pro kolo i pastorek, mění se pouze velikost natočení v závislosti na parametrech ozubených kol. Použité souřadné systémy  $S_{cg}$ ,  $S_m$ ,  $S_w$  a  $S_i$ , jsou umístěny ve společném bodě, vrcholu roztečného kuželu, proto jsou matice transformace pouze rotační.

Při generování ozubení se rovinné kolo odvaluje po kole kuželovém, což lze vyjádřit rotací rovinného kola za současné rotace kuželového kola v opačném směru, jak je značeno na obrázku. Toto je řešeno transformacemi mezi souřadnými systémy  $S_{cg}$  a  $S_l$ .



Obr. 23 Souřadné systémy pro generování ozubení pastorku – podle [28]

Rotace rovinného kola v roztečné rovině, je řešena rotací souřadného systému  $S_{cg}$ , o velikost úhlu  $\psi_{cg}$ , kolem osy  $z_m$ . [28]

$$M_{mcg}(\psi_{cgi}) = \begin{bmatrix} \cos(\psi_{cgi}) & -\sin(\psi_{cgi}) & 0 & 0 \\ \sin(\psi_{cgi}) & \cos(\psi_{cgi}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (43)$$

kde úhel  $\psi_{cg}$  je úhlový parametr získaný z velikosti úhlu otočení kola  $\psi_i$ , podle poměru počtu zubů rovinného a kuželového kola.

Za předpokladu, že úhel os kol  $\Sigma = 90^\circ$ , je v rovnici (44) hodnota  $\pi/2$ , ke které je přičtena nebo odečtena hodnota úhlu roztečného kuželu. Znaménko (-) je pro pastorek, znaménko (+) je pro kolo, protože úhel  $\delta_2$  je měřen v opačném směru. Touto transformací je řešen přechod mezi roztečnou rovinou a kuželovou plochou. [28]

$$M_{wm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\frac{\pi}{2} \mp \delta_i) & -\sin(\frac{\pi}{2} \mp \delta_i) & 0 \\ 0 & \sin(\frac{\pi}{2} \mp \delta_i) & \cos(\frac{\pi}{2} \mp \delta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Rovnicí (45) je řešen pohyb souřadného systému  $S_w$  podle rotace kuželového kola. Protože se ve skutečnosti otáčí kuželové kolo, je směr otočení pomocného souřadného systému opačný, proto je v rovnicích opačné znaménko. [28]

$$M_{iw}(\psi_{cgi}) = \begin{bmatrix} \cos(\psi_{cgi} \cdot \sin(\delta_i)) & \pm \sin(\psi_{cgi} \cdot \sin(\delta_i)) & 0 & 0 \\ \mp \sin(\psi_{cgi} \cdot \sin(\delta_i)) & \cos(\psi_{cgi} \cdot \sin(\delta_i)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (45)$$

kde znaménko před goniometrickou funkcí je pro pastorek v horním indexu a pro kolo v dolním indexu.

Výsledkem celkového postupu jsou souřadnice bodů povrchu ozubení, vyjádřené v souřadném systému kuželového kola  $S_i$ .

Různé varianty této metody mohou být použity pro získání a optimalizaci parametrů obráběcího procesu [28], zkoumání záběru ozubení s ohledem na použité postupy a modifikace, dále pak pro pevnostní a teplotní analýzy různých zatěžovacích podmínek – s využitím vhodného software. [26] Od požadavku se odvíjí i provedení matematického modelu.

Nevýhodou této metody je obtížnější parametrizace, jelikož pro generování i jednoduchého modelu je nutné provádět transformace mezi několika souřadnými systémy, za použití mnoha proměnných, získaných zejména z obráběcího procesu. Mnohdy jsou tyto proměnné vzájemně závislé, což vede k numerickým metodám řešení. [26]

### 3.1.2 GEOMETRICKÁ METODA

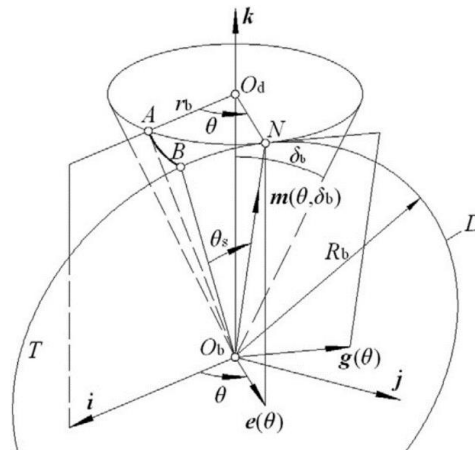
V předešlém textu (kapitola 2 Profil ozubení) byly popsány konstrukce profilů ozubení matematickými rovnicemi, odvozené přímo či nepřímo ze záběru sdružených profilů. Geometrická metoda umožňuje modelování profilu ozubení bez znalosti přesné geometrie nástroje, právě parametricky určenými křivkami. S tím souvisí i nepřesnost této metody, protože kuželové ozubení nemá, tak jako rovinné čelní ozubení, standardizovaný evolventní tvar profilu zubu. Pro vytvoření parametrického modelu je však nutné počítat s jistou aproximací reálného tvaru, protože stejnou výrobní metodou lze dosáhnout jiného tvaru zubu, například pouhou změnou úhlu natočení břitů frézovací hlavy. Zahrnutí každého detailu procesu obrábění do parametrického modelu generovaného pomocí CreoParametric by bylo příliš komplikované, ne-li nemožné.

Pro zakřivené ozubení existuje matematický model založený na sférickém evolventním profilu, který bere v potaz tvar křivky zubu [24]. Přestože sférická evolventa má uplatnění převážně pro kuželová kola s přímými zuby, jedná se o nejpodobnější profil klasickému standardizovanému profilu evolventnímu u čelních ozubených kol. Proto je také použita pro modelování kuželového ozubení se zakřivenými zuby. Tvar zakřivení zubu je řešen vhodným polohováním a propojením vícero sférických evolvent nebo naopak vytvořením řídicí křivky a tažením sférické evolventy po této křivce.

Matematický model sférické evolventy byl již popsán v kapitole 2.5, nicméně s ohledem na tvar křivky zubu je tato konstrukce modifikována. Na obr. 24 je zobrazena sférická evolventa, vzniklá odvalováním tzv. generující kružnice  $D$  (ležící v generující rovině  $T$ ) po základním kuželu, jako trajektorie bodu  $B$ . Rovnice sférické evolventy jsou sestaveny pro souřadný systém  $S_0(i, j, k)$ , se středem ve vrcholu základního kuželu, kde  $k$  je ve směru osy základního kuželu, a  $i$  rovnoběžně k vektoru  $O_dA$ , směru výchozího bodu sférické evolventy  $A$ . [24]

Velikost odvalení kružnice, odpovídá úhlu  $\theta$ , přičemž na generující kružnici se jedná o úhel velikosti  $\theta_s$ , opět zde platí stejné délky oblouků, proto platí rovnice (46). [24] Vyjádření tohoto úhlu je důležité, jelikož je využíván v parametrických rovnicích.

$$\theta_s = \theta \sin \delta_b. \quad (46)$$



Obr. 24 Generování sférické evolventy [24]

Prostorové transformace bodu  $B$  jsou řešeny pomocí jednotkových vektorů, vycházejících z bodu  $O_b$  (vyznačených na obr. 24) a vázaných na generující kružnici  $D$ . Vektor  $\mathbf{m}(\theta, \delta_b)$ , rovnice (47) [22] je ve směru povrchy základního kuželu,  $O_b N$ . Vektor  $\mathbf{g}(\theta)$ , rovnice (48) [22] je kolmý na rovinu, ve které určen vektor  $\mathbf{m}$ . Vektor  $\mathbf{e}(\theta)$ , rovnice (49) [22], je zmíněn pouze pro doplnění, jelikož je používán pro určení normály povrchu zubu (například pro analýzu kontaktu zubů) [24], ale neovlivňuje samotný tvar zubu, proto není v parametrických rovnicích použit. Zmíněné pomocné vektory jsou získány ve sférických souřadnicích jako funkce úhlů  $\theta$  a  $\delta_b$ . [22]

$$\mathbf{m}(\theta, \delta_b) = \begin{bmatrix} \sin \delta_b \cos \theta \\ \sin \delta_b \sin \theta \\ \cos \delta_b \end{bmatrix}, \quad (47)$$

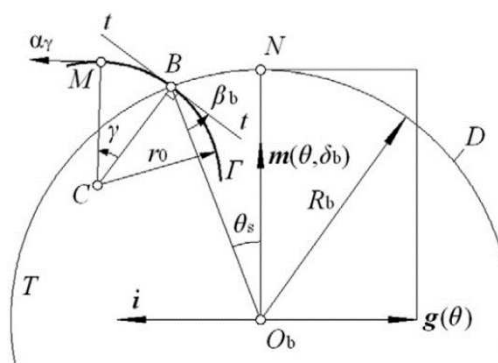
$$\mathbf{g}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (48)$$

$$\mathbf{e}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Samotná konstrukce je založena na určování souřadnic bodů sférické evolventy podle určité křivky. Na obr. 25 je zobrazena situace generování pomocí oblouku, odpovídající metodě výroby Gleason. V generující rovině  $T$  je definována křivka  $\Gamma$ , tvaru oblouku, se středem v bodě  $C$  a poloměrem  $r_0$ . Oblouk prochází bodem  $B$ , přičemž tečna oblouku v tomto bodě je natočena pod úhlem  $\beta_b$  vzhledem k  $O_b B$ , jak znázorněno na obrázku. Na oblouku je pak získána poloha bodu  $M$  pomocným úhlem  $\gamma$ . Tento bod je bodem sférického evolventního povrchu zubu. [24]

Souřadnice bodu  $M$  jsou vyjádřeny v souřadném systému  $S_0$  rovnicí (50). [24]

$$\mathbf{r}_M = \overrightarrow{O_b M} = \overrightarrow{O_b B} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}, \quad (50)$$



Obr. 25 kruhový oblouk v generující rovině pro vytvoření levotočivého tvaru zubu [24]

kde jednotlivé členy rovnice lze popsat následujícími rovnicemi (51) až (53). Rovnice (51) je parametrické vyjádření samotné sférické evolventy a rovnice (52) a (53) pak zmíněná modifikace s ohledem na parametry zakřivených zubů. [24]

$$\overrightarrow{ObB} = R_b[\mathbf{m}(\theta, \delta_b) \cos \theta_s - \mathbf{g}(\theta) \sin \theta_s], \quad (51)$$

$$\overrightarrow{BC} = -r_0 \left\{ \mathbf{m}(\theta, \delta_b) \cos \left[ \theta_s - S_h \left( \frac{\pi}{2} - \beta_b \right) \right] - \mathbf{g}(\theta) \sin \left[ \theta_s - S_h \left( \frac{\pi}{2} - \beta_b \right) \right] \right\}, \quad (52)$$

$$\overrightarrow{CM} = r_0 \left\{ \mathbf{m}(\theta, \delta_b) \cos \left[ \theta_s - S_h \left( \frac{\pi}{2} - \beta_b - \gamma \right) \right] - \mathbf{g}(\theta) \sin \left[ \theta_s - S_h \left( \frac{\pi}{2} - \beta_b - \gamma \right) \right] \right\}, \quad (53)$$

kde  $S_h$  je koeficient směru křivky zubu,  $S_h = 1$  pro levotočivý,  $S_h = -1$  pro pravotočivý směr zakřivení ozubení. [24]

Protože generování sférické evolventy probíhá na základním kuželu, je nutné přepočítat parametry kuželového ozubení v roztečné rovině do roviny kolmé k roztečnému kuželu, tak aby byly poté použity na povrchu základního kuželu. Nejdříve je získán úhel základního kuželu  $\delta_b$  rovnici (54), který je použit při výpočtu úhlu zakřivení křivky zubu  $\beta_b$  v rovnici (55). [24]

$$\delta_b = \sin^{-1} \left( \frac{\sin \delta \cos \beta_P \cos \alpha_{nP}}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta_P \cos^2 \alpha_{nP}}} \right), \quad (54)$$

$$\beta_h = \sin^{-1}(\sin \beta_p \cos \alpha_{np}), \quad (55)$$

kde  $\alpha_{nP}$  je úhel záběru a  $\beta_P$  je úhel zakřivení šroubovice na roztečném kuželu. Index  $P$  značí bod na roztečném kuželu, ke kterému jsou hodnoty známy, obvykle na střední délce povrchu kuželu. [24]

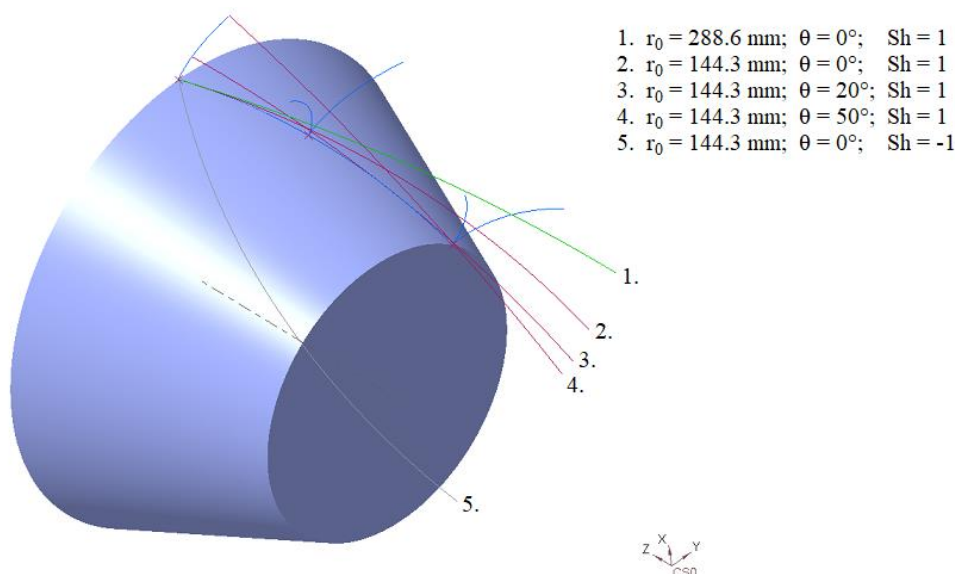
Při hledání optimálního způsobu modelování kola vyráběného cyklo-paloidním způsobem, bylo uvažováno nad možností využití základu zmíněného matematického modelu, kde by se parametry kruhového oblouku vhodně upravily podle parametrů prodloužené epicykloidy s uvažováním typu tvaru věnce III, tedy s konstantní výškou ozubení. Byl proto sestaven testovací model pro získání představy o vlastnostech jednotlivých křivek.

Parametry testovacího modelu obsahuje tabulka 2. Hodnoty jsou převzaty z [24], kde byly použity pro vzorový matematický model.

Tabulka 2 Parametry testovacího modelu [24]

Zvolené parametry	Hodnota	
Počet zubů	$z_1 = 11$	$z_2 = 25$
Obvodový modul	$m_{nm} = 9$	
Úhel záběru	$\alpha_{nP} = 20^\circ$	
Šířka ozubení	$b = 40 \text{ mm}$	
Úhel os	$\Sigma = 90^\circ$	
Úhel roztečného kuželu	$\delta_1 = 23.7495^\circ$	$\delta_2 = 66.2505^\circ$
Úhel základního kuželu	$\delta_{b1} = 21.5950^\circ$	$\delta_{b2} = 56.7684^\circ$
Délka povrchy roztečného kuželu	$R_b = 102.9085 \text{ mm}$	
Proměnné parametry	Označení	
Poloměr generující oblouku	$r_0 [\text{mm}]$	
Úhel odvalení generující kružnice	$\theta [^\circ]$	

Po vytvoření základního kuželu s ohledem na parametry ozubení byly generovány sférické evolventy zmíněným způsobem. Na obr. 26 jsou zobrazeny křivky profilu ozubení, sférické evolventy a generující oblouky, podle zvolených hodnot (tabulka 3).



Obr. 26 Testovací model pro ověření vlastností metody modelování

Tři sférické evolventní křivky jsou získány pro různé hodnoty pomocného úhlu  $\gamma$ , přičemž generování křivky začíná vždy na povrchu základního kuželu. Směr sférické evolventy určuje velikost úhlu odvalení  $\theta$ . Problémem je, že pomocný úhel  $\gamma$  mění polohu bodů sférické evolventy, proto počátek sférické evolventy v místě povrchu kuželu nezačíná pro  $\theta = 0^\circ$ . Tento efekt lze pozorovat na křivkách generující oblouku, které jsou generovány pro konstantní hodnotu úhlu  $\theta$ , za proměnné hodnoty pomocného úhlu  $\gamma$ . V legendě obrázku jsou tyto parametry vypsány pro jednotlivé křivky, kde *křivka 1* je znázorněna pro dvojnásobnou hodnotu poloměru  $r_0$ , *křivky 2-4* jsou vykresleny pro různé hodnoty úhlu  $\theta$  a *křivka 5* představuje opačný směr zakřivení (pravotočivý), pro rozdílnou hodnotu parametru  $Sh$ .

Z modelu vyplývá, že generující oblouky se převalují přes povrch kuželové plochy a generují sférický evolventní profil, ale rovnice neumožňují snadný způsob kontroly nad konkrétním bodem dotyku oblouku a povrchu základního kuželu. Pro ozubení zakřivené ve tvaru oblouku jde o efektivní způsob generování, ale neumožňuje snadnou změnu tvaru a parametrů oblouku.

Nicméně, s ohledem na vlastnosti sférické evolventy, tak jak je popsána tímto matematickým modelem, bylo místo generujícího oblouku použito prodloužené epicykloidy přepočítáním bodů roviny na kuželovou plochu. K těmto bodům je polohována sférická evolventa, vytvořená zmíněným matematickým postupem. Tedy je dosaženo pozitivních vlastností sférické evolventy pro odpovídající tvar křivky zubu.

### 3.2 MODEL OZUBENÍ SE ZAKŘIVENÝMI ZUBY

Základem matematického modelu je definování základních parametrů a geometrie kuželového kola. Pro vzorový model parametrického ozubení byly zvoleny nebo dopočítány parametry, které zobrazuje tabulka 3. Jedná se o typ věnce III, tedy s konstantní výškou zubu, proto i velikosti úhlů kuželů jsou shodné.

Tabulka 3 Parametry vzorového modelu kuželového soukolí

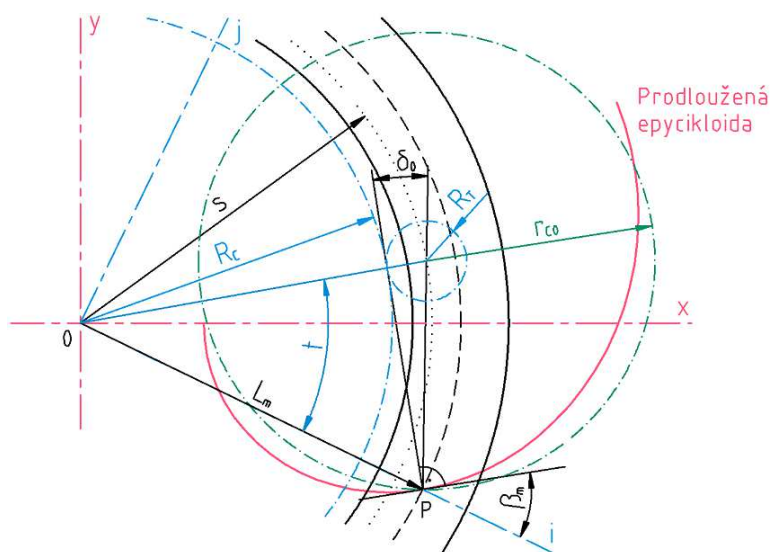
Zvolené parametry	Hodnota	
Počet zubů	$z_1 = 17$	$z_2 = 35$
Obvodový modul	$m_{nm} = 5$	
Úhel záběru	$\alpha_{nm} = 20^\circ$	
Šířka ozubení	$b = 30$	
Úhel sklonu zubu	$\beta_m = 35^\circ$	
Úhel os	$\Sigma = 90^\circ$	
Součinitel výšky zubu	$h_a^* = 1$	
Součinitel vůle ozubení	$c = 0.25$ (cyklo-paloidní [9])	
Směr šroubovice pastorku	levotočivý	
Vypočtené parametry pastorku		
Úhel roztečného kuželu	$\delta_1 = 25.9065^\circ$	$\delta_2 = 64.0935^\circ$
Střední průměr roztečného kuželu	$d_{m1} = 103.7658 \text{ mm}$	$d_{m1} = 213.6356 \text{ mm}$
Délka vnější povrchy kuželu	$L_m = 118.7513 \text{ mm}$	
Výška hlavy zubu	$h_a = 5 \text{ mm}$	
Výška paty zubu	$h_f = 6.25 \text{ mm}$	

Výpočetní vztahy jsou obdobné jako pro výpočet ozubení přímého, pouze na místo obvodového modulu  $m_i$  je použit normálový modul  $m_n$ . Střední roztečný průměr je počítán se zohledněním úhlu zakřivení ozubení  $\beta_m$  rovnicí (56) [8].

$$d_{mi} = \frac{m_{nm}}{\cos \beta_m} z_i. \quad (56)$$

### 3.2.1 PRODLOUŽENÁ EPICYKLOIDA

Ozubení cyklo-paloidní je vytvářeno plynulým odvalováním (jak uvedeno v kapitole 1.2.3). Vzniká přitom specifický tvar křivky zubů, kterou lze zobrazit v roztečné rovině jako prodlouženou epicykloidu. Na obr. 27 je zobrazena situace generování prodloužené epicykloidy, včetně zjednodušeného znázornění nástroje v podobě kružnic. Epicykloida je generována v souřadném systému  $S_g(x, y)$  [23], tomu odpovídá poloha nástroje v souřadném systému  $S_c(i, j)$  [19]. Důvod, proč jsou v nákresu použity rozdílné souřadné systémy je kvůli zjednodušení výpočtu, jelikož souřadný systém nástroje  $S_c$ , slouží pouze k výpočtu valivých kružnic pro generování prodloužené epicykloidy.



Obr. 27 Schéma generování prodloužené epicykloidy – podle [19] a [23]

Samotné generování prodloužené epicykloidy probíhá odvalováním kružnice  $R_T$  po kružnici nehybné kružnici  $R_C$ , což odpovídá pohybu nástroje, kdy nože umístěné na frézovací hlavě ve vzdálenosti  $r_{c0}$ , generují tvar epicykloidy. Pro zjednodušení jsou nože reprezentovány bodem  $P$ . Při skutečném obrábění se obvykle jedná o dvojice nožů, které jsou jednotlivě vhodně natočeny, aby bylo dosaženo optimálního tvaru ozubení. Současně s pohyby nástroje rotuje obráběné kuželové kolo, čímž je přenesena rovinná prodloužená epicykloida na povrch kuželu.

Prodoužená epicykloida v souřadném systému  $S(x, y)$ , jako dráha bodu  $P$ , je určena rovnicemi (57) a (58). [23]

$$x(t) = (R_C + R_T) \cos t - r_{c0} \cos \frac{(R_C + R_T)t}{R_T}, \quad (57)$$

$$y(t) = (R_C + R_T) \sin t - r_{c0} \sin \frac{(R_C + R_T)t}{R_T}, \quad (58)$$

kde parametr  $t$  je úhel odpovídající poloze odvalení nástroje,  $R_C$  a  $R_T$  jsou poloměry valivých kružnic a  $r_{c0}$  je jmenovitý poloměr frézovací hlavy.

Parametrické rovnice epicykloidy jsou řízeny velikostí valivých kružnic,  $R_C$  a  $R_T$ , které jsou získány z parametrů nástroje a ozubení. Rozměry těchto kružnic jsou pouze poměrové, celkový rozměr určuje parametr radiálního vyložení nástroje  $s$ . Velikost poloměru nehybné kružnice



v roztečné rovině  $R_C$  je počítána podle rovnice (59), velikost poloměru valivé kružnice nástroje  $R_T$  je počítána podle rovnice (60). [18]

$$R_C = \frac{Z_C}{Z_0 + Z_C} s, \quad (59)$$

$$R_T = \frac{Z_0}{Z_0 + Z_C} s, \quad (60)$$

Kde  $s$  je velikost radiálního vyložení nástroje,  $Z_{cg}$  je teoretický počet zubů rovinného kola a  $Z_0$  je počet nožových dvojic frézovacího nástroje. Počty zubů jsou získávány obvyklým přepočtem z poměru průměrů (rovinného kola a kuželového kola), například podle rovnice (61), přičemž  $Z_{cg}$  není zaokrouhlováno na celé číslo. [19]

$$Z_{cg} = \frac{2L_m Z_1}{d_{m1}}, \quad (61)$$

$Z$  pozice nástroje a parametrů ozubení lze získat velikost radiálního vyložení  $s$  podle vektorové rovnice (62). Velikosti povrchy kuželu  $L_m$  a jmenovitého poloměru nástroje  $r_{c0}$ , jsou do vektorové podoby převedeny rovnicemi (63) a (64). [19]

$$\vec{s} = \vec{L}_m - \vec{r}_{c0}, \quad (62)$$

$$\vec{L}_m = L_m \vec{i}, \quad (63)$$

$$\vec{r}_{c0} = r_{c0} \sin(\beta_m - \delta_0) \vec{i} - r_{c0} \cos(\beta_m - \delta_0) \vec{j}, \quad (64)$$

kde velikost úhlu  $\delta_0$  se spočítá podle rovnice (65). [19]

$$\delta_0 = \sin^{-1} \left( \frac{m_{nm} Z_0}{2r_{c0}} \right), \quad (65)$$

kde  $Z_0$  je počet dvojic obráběcích břitů nástroje (obvykle 5 pro výrobu cyklo-paloidní).

Hodnotu  $r_{c0}$  lze přibližně odhadnout podle použité výrobní metody s ohledem na poměr k poloměru střední délky povrchy roztečného kuželu  $L_m$ . Pro cyklo-paloidní metodu výroby ozubení lze orientačně vycházet z hodnoty poměru:  $r_{c0}/L_m = 0.8$ . [9] Přesná hodnota  $r_{c0}$  vychází z konkrétního výrobního nástroje, proto se od odhadované může lišit.

U reálného obráběcího procesu jsou nože nastaveny na jinou hodnotu, než je jmenovitý poloměr frézovací hlavy, případně mohou být natočeny – tím se docílí například modifikace boků zubů protáhlejším tvarem křivky zubu. Pro tento způsob matematického modelování (geometrická metoda) nejsou tyto modifikace brány v úvahu, jelikož nůž frézovací hlavy je reprezentován pouze bodem tvořícím epicykloidu. Podrobnějších nástrojových parametrů lze dosáhnout pomocí maticové metody modelování, kapitola 3.1.1, kdy jsou natočení nožů přímo součástí matematického modelu.

Pro vzorové ozubení jsou spočteny základní parametry nástroje, jak ukazuje tabulka 4.

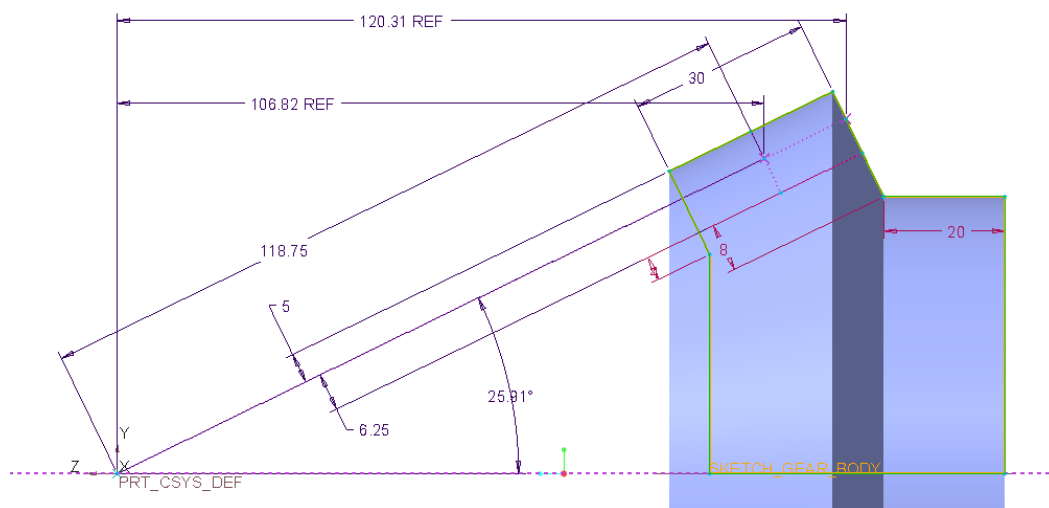
Tabulka 4 Parametry nástroje

Název parametru	Hodnota
Počet zubů rovinného kola	$Z_{cg} = 38.9102$ mm
Počet nožových dvojic nástroje	$Z_0 = 5$
Jmenovitý průměr nástroje	$r_{c0} = 71.2508$ mm
Úhel natočení nože	$\delta_0 = 7.5608^\circ$
Poloměr vyložení nástroje	$s = 109.7942$ mm
Poloměr nehybné kružnice	$R_C = 97.2921$ mm
Poloměr hybné kružnice	$R_T = 12.5021$ mm

### 3.2.2 MODELOVÁNÍ V SOFTWARE CREO PARAMETRIC

Samotné modelování začíná vytvořením vnějšího objemu ozubeného kola. Ozubení bude tedy modelováno formou zubových mezer, které budou z objemového modelu odebrány, čímž vznikne samotné ozubení.

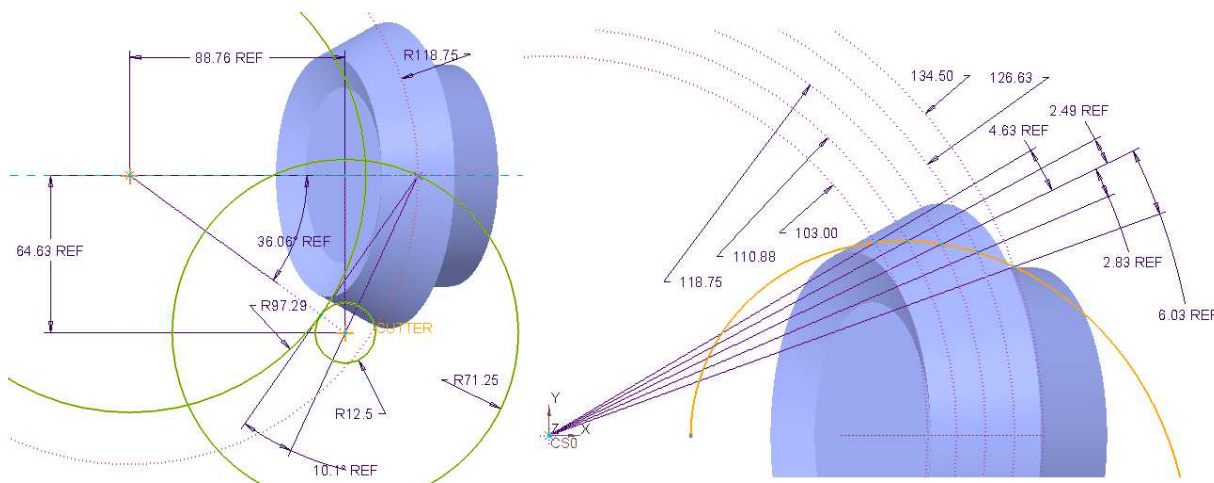
Nejdříve jsou určeny základní parametry ozubení, použité hodnoty zobrazuje tabulka 3 a tabulka 4. Model je řízen globálními parametry a rovnicemi, v Creo Parametric pomocí modulů *relations* a *parameters*. Globálně jsou definovány hlavní parametry soukolí, tj., počet zubů, rozměry kol, parametry profilu zubu a výrobního nástroje. Model generuje samostatné kolo, tedy změna parametrů pastorku a kola je provedena pouhou změnou indexů v sekci rovnic *MODEL PARAMETERS*, například úhel roztečného kuželu  $\text{DELTA} = \text{DELTA}_1$ . Z těchto parametrů lze získat geometrii kuželového kola, která vzniká podle obr. 28.



Obr. 28 Geometrie kuželového kola

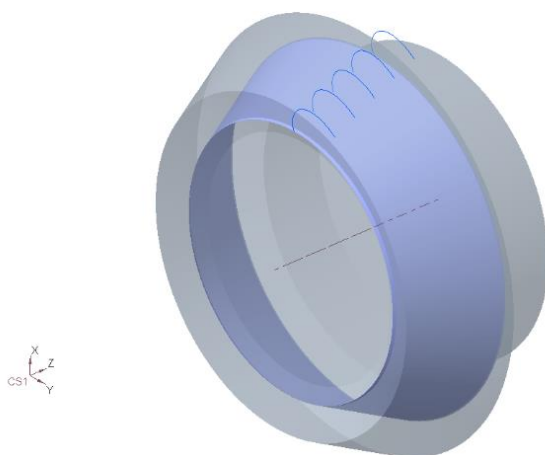
Na povrchu roztečného kuželu je tečně vedena roztečná rovina, ve které jsou definovány parametry nástroje a z nich získaná prodloužená epicykloida jak ukazuje obr. 29. Pro pozdější určení polohy sférické evolventy, jsou v roztečné rovině vytvořeny pomocné kružnice,

odstupňovány velikostí poloměru o hodnotu označenou  $S\_FACTOR$  od střední vzdálenosti  $L_m$  (118.75 mm). Získanými průsečíky kružnic s epicykloidní křivkou jsou poté vedeny pomocné přímky. Průsečíkem ve vzdálenosti  $L_m$  je vedena přímka, od níž jsou získávány velikosti relativních úhlů natočení zbývajících přímek a přepočtem získané velikosti oblouků. Z roztečné roviny jsou tyto oblouky přeneseny na kuželovou plochu přepočtem na velikost úhlu, o kterou je poté otáčena příslušná sférická evolventa boku zubu. Změna směru zakřivení zubů je provedena součinitelem  $SPIRAL\_DIR = 1$  pravotočivé a  $SPIRAL\_DIR = -1$  levotočivé.



Obr. 29 Parametry prodloužené epicykloidy (vlevo) a generovaná epicykloida (vpravo)

Kvůli konstantní výšce zubu nelze generovat sférické evolventy na roztečném kuželu původními vztahy, tj ve vzdálenosti od vrcholu roztečného kuželu. Vytvořena je pouze jedna sférická evolventa ve vzdálenosti  $L_m$ . Počátek této sférické evolventy zároveň určuje pomyslný základní kužel. V literatuře není pro konstantní výšku zubu tento kužel popsán, pro potřeby určení výchozího bodu sférických evolvent byl odvozen jako posunutý povrch roztečného kuželu. Sférické evolventy, jak ukazuje obr. 30 jsou shodné, vytvořené nástrojem *pattern* s krokem o velikosti  $S\_FACTOR$ . Roztečný kužel tedy protínají ve stejné vzdálenosti od souřadného systému (a vrcholu kuželu), podle pomocných kružnic z předešlé části.

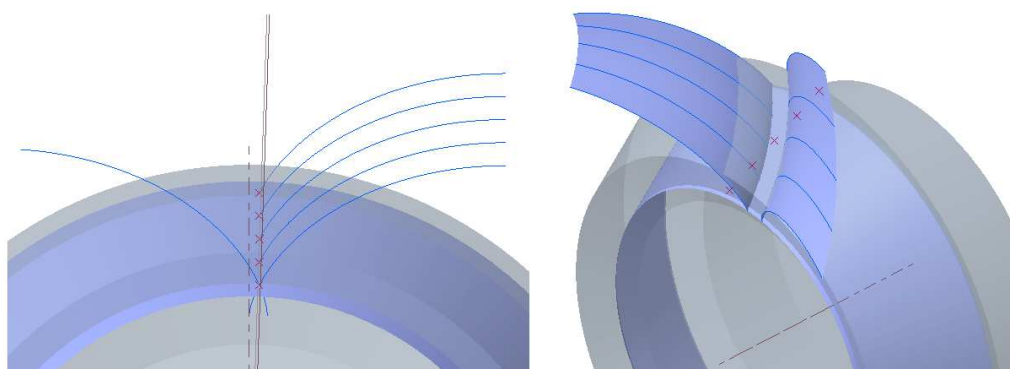


Obr. 30 Sférické evolventy na povrchu roztečného kuželu

Následuje tvorba samotné zubové mezery, vhodným transformováním sférických evolvent. Nejdříve jsou získány průřezy křivek s povrchem roztečného kuželu, na obr. 31 vlevo, kterými jsou poté vedeny pomocné roviny (procházející osou kola). Křivky protilehlého profilu vzniknou zrcadlením přes pomocnou rovinu, čímž je dosažena nulová počáteční vzdálenost rozteče na roztečném kuželu (kvůli pozdějšímu nastavení šířky zubové mezery). Mezi pomocnými rovinami a svislou rovinou globálního souřadného systému jsou získány pomocné korekční úhly. Slouží pro srovnání sférických evolvent do stejné osy souměrnosti tak, aby byl tvar zubu souměrný vzhledem k vrcholu kuželu.

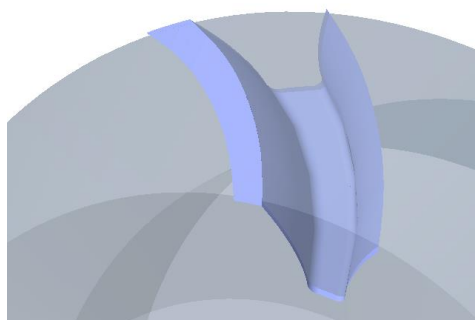
Velikost šířky zubové mezery, pro jednotlivé úrovně zubu, je počítána z velikosti obvodového modulu  $m_{ti} = d_i/z_i$ . Do šířky mezery jsou v tomto bodě započítány i korekce posunutí  $x_s$  a  $x_h$ . Celkový rozměr je přepočten na roztečný kužel ve formě kruhového oblouku. Převedením na úhel jsou pravé a levé sférické evolventy natočeny o poloviční hodnotu (souměrně k ose zubu). Vznikne tak souměrná zubová mezera, směřující do vrcholu kuželu.

Posledním krokem je polohování jednotlivých dvojic křivek profilu podle prodloužené epicykloidy, tedy hodnota relativních úhlů přepočtena na odpovídající poloměr ke vzdálenosti křivky od vrcholu kuželu. Křivkami je proložena plocha, která reprezentuje plochy boků zubů.



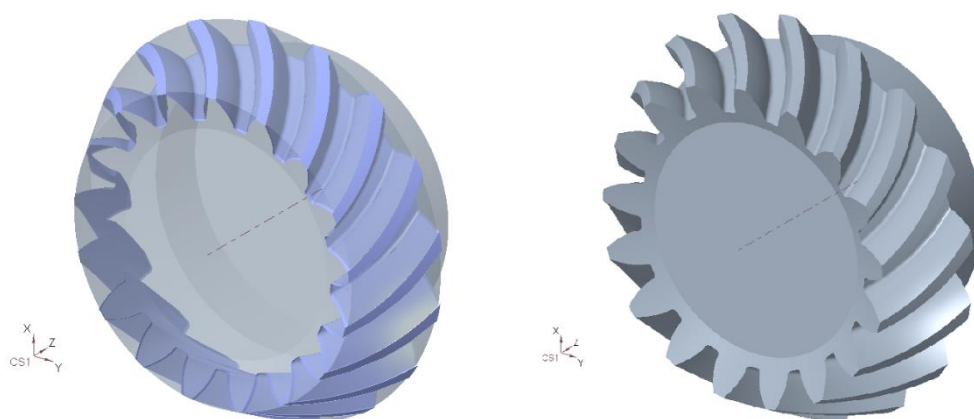
Obr. 31 Průřezy sférických evolvent s roztečným kuželem a tvarované plochy boků zubů

Plochy zubů jsou protaženy tak, aby přesáhly povrch patního kuželu. Následně pomocí nástrojů *merge* a *trim* vznikne tvar zubové mezery. V patní oblasti je zaoblení s velikostí násobku vůle a modulu. Pro pozdější sloučení zkopírovaných zubových mezer je nutné, aby přesně navazovaly, proto je ponechána horní plocha zubu. Na obr. 32 je zobrazena kompletní vymodelovaná rozteč ozubení.



Obr. 32 Model zubové mezery

Pomocí nástroje *pattern* je model zubové rozteče kopírován kruhovým polem podle počtu zubů kole osy kola  $z$ , na obr. 33 v levé části. Jednotlivé modelové zubové rozteče jsou vybrány a spojeny nástrojem *merge*. Při změně parametrů generovaného kola je nutné manuálně přidat, nebo odebrat chybějící zubové mezery, *tento proces neprobíhá automaticky*. Výsledné ozubení je poté získáno opět za použití nástroje *merge*, kdy je odečteno od původního kuželového kola a tím vznikne konečný tvar zubů.



Obr. 33 Kruhové pole zubových mezer a výsledné kuželové ozubené kolo se zakřivenými zuby

Parametrický model popisovaného ozubení je přílohou I. Modely kol vzorového soukolí jsou přílohami II a III ve formátu *STEP*. Zadané modely jsou odevzdány vedoucímu bakalářské práce.

### 3.2.3 VLASTNOSTI PARAMETRICKÉHO MODELU

Model je vytvořen v software Creo Parametric 4.0 Education Edition, z čehož plyne nekompatibilita s komerčními verzemi programu.

Změny mezi jednotlivými koly soukolí jsou prováděny přepsáním indexů parametrů v *relations*: *DELTA*, *DEFAULT\_THICKNESS*, *H\_A*, *H\_F*, *Z* a změnou znaménka *SPIRAL\_DIR*. Tvar ozubení lze ovlivňovat také změnou parametrů nástroje, tedy počtu řezných nožů *Z\_0* a jmenovitého poloměru *R\_C0*.

Při změnách parametrů může docházet k chybám při generování modelu. Manuálně je potřeba přidat/odebrat počty vymodelovaných zubových mezer při použití nástroje *merge*, jak psáno výše. Pokud je věnec ozubení zkosen tak, že patní část zubu přesahuje šířku ozubení, je nutné zvýšit parametr *S\_FACTOR* (čímž je ale snížena přesnost modelu). Možný problém může nastat při generování parametrických křivek, hodnota parametru je nastavena s dostatečnou rezervou, přesto může nastat situace, kdy bude nutné změnit rozsah parametru pro danou křivku.

Protože je použito stejné sférické evolventy pro celou plochu boku zubu, zmenšuje se přesnost směrem ke krajním částem boku zubu. Pro velké šířky zubů může docházet ke kolizi špičky zubu s objemem proti-zubu na vnitřním poloměru kol. Pro menší šířky ozubení reprezentuje model přesněji celkový tvar křivky zubu, stejně tak profil samotného zubu.

## ZÁVĚR

V této bakalářské práci je řešena problematika modelování přesného tvaru ozubení. Výstupem je parametrický model kuželového ozubení vytvořený v softwaru Creo Parametric 4.0.

Úvodem jsou shrnuty poznatky týkající se teorie ozubení. V části rozdělení typů ozubených kol je pozornost věnována převážně kuželovému ozubení, kde jsou typy ozubení rozděleny podle výrobních metod – způsobující rozdílné geometrie kuželového ozubení.

Prostřední část je zaměřena na geometrii profilu ozubení. Jsou popsány obecné rovinné metody konstrukce, přímá, trochoidní a obálková, vedoucí ke konkrétním profilům ozubení. Součástí jsou postupy konstrukce rovinné evolventy, sférické evolventy a oktoidního profilu ozubení,

Poslední část je věnována metodám parametrického modelování kuželových ozubených kol se zakřivenými zuby (metody maticová a geometrická). Postup generování matematického modelu je popsán pro obě metody. Maticová metoda představuje přesnější ale výpočetně náročnější model, není vhodná pro tvorbu parametrických modelů v CAD softwaru. Možností je forma exportu souřadnic povrchu, ale práce s těmito daty je náročnější a bez možnosti rychlé změny parametrů. Geometrická metoda navazuje na konstrukce křivek profilu ozubení, využívá tvaru sférické evolventy ke znázornění povrchu ozubení.

Pro tvorbu samotného modelu byla zvolena geometrická metoda. Upřednostněna byla jednodušší možnost parametrizace modelu. Nepřesnosti se projevují výrazněji v krajích ozubení a při větší šířce ozubení. Výhodou zvoleného postupu je snadná změna parametrů ozubení pro získání představy o vlastnostech záběru daného soukolí. Model je možné použít ihned, případně provést dodatečné úpravy tvaru ozubení.

Praktické využití modelů může být pro počítačové simulace k získání dat o chování ozubení nebo pro 3D tisk prototypů ozubených kol.

Výsledný parametrický model je součástí příloh bakalářské práce.

## POUŽITÉ INFORMAČNÍ ZDROJE

- [1] SHIGLEY, Joseph Edward, Charles R. MISCHKE, Richard G. (Richard Gordon) BUDYNAS, Martin HARTL a Miloš VLK. *Konstruování strojních součástí*. V Brně: VUTUM, 2010, xxv, 1159 s. : il. ; 26 cm. ISBN 978-80-214-2629-0.
- [2] KRÍŽ, Rudolf. *Strojnické tabulky. II., Pohony. Hřídele, ozubené převody, řetězové a řemenové převody*. Ostrava: Montanex, 1997, 213 s. ; 22 cm. ISBN 80-85780-51-8.
- [3] SVOBODA, Pavel, Jan BRANDEJS a Jiří DVOŘÁČEK. *Základy konstruování*. Doplněné vydání. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2016, 230 stran : ilustrace. ISBN 978-80-7204-921-9.
- [4] ŠEJVL, Miroslav. *Theorie a výpočty ozubených kol. Díl I. čelní kola s přímými zuby. Čelní kola se zakřivenými zuby. Modifikované odvalování. Zubová čerpadla. Rootsovy kompresory. Matematické podmínky záběru. Planetová soukolí a diferenciály*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1957, 555 s. : il. Dostupné také z: <https://ndk.cz/uuid/uuid:146c0db0-fbbb-11e5-8d5f-005056827e51>
- [5] KLEPAL, Václav. *Ozubená kola kuželová, Díl 1: Theorie, praxe, výroba, měření kuželových kol s praktickými příklady pro konstrukci i výrobu*. Praha: Vědecko-technické nakladatelství, 1950. Dostupné také z: <https://ndk.cz/uuid/uuid:3aa27840-dada-11e5-a3e0-005056827e51>
- [6] CHAN, Cody Leeheng a Kwun-lon TING. Extended Camus Theory and Higher Order Conjugated Curves. *Journal of Mechanisms and Robotics* [online]. 2019, 11(5) [cit. 2021-03-13]. ISSN 1942-4302. Dostupné z: doi:10.1115/1.4043924
- [7] BUREŠ, Jan. *Kuželová kola s obloukovým ozubením Gleason: určeno pro frézare ozubených kol, seřizovače, mistry, konstruktéry a technology*. Praha: SNTL, 1962, 135 s.
- [8] PRÁŠIL, Ludvík. Kuželová kola se šikmými a zakřivenými zuby. Katedra částí a mechanismů strojů [online]. Liberec, 2010 [cit. 2021-02-22]. Dostupné z: [http://www.kst.tul.cz/podklady/casti\\_fs/podklady/Kuzelova%20soukoli%20se%20sikmy%20a%20zakrivenymi%20zuby.pdf](http://www.kst.tul.cz/podklady/casti_fs/podklady/Kuzelova%20soukoli%20se%20sikmy%20a%20zakrivenymi%20zuby.pdf)
- [9] KLINGELNBERG, Jan. *Bevel gear: fundamentals and applications*. Berlin: Springer Verlag, 2016, xxviii, 328 stran : ilustrace. ISBN 978-3-662-43892-3.
- [10] TSIAFIS, I, P MAMOURI a S KOMPOGIANNIS. Design and manufacturing of spiral bevel gears using CNC milling machines. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* [online]. 2018, s. 012066 [cit. 2020-12-14]. ISSN 17578981. Dostupné z: doi:10.1088/1757-899X/393/1/012066
- [11] SCREW GEARS. *KHK Gears* [online]. Kawaguchi-shi: Kohara Gear Industry, c2015 [cit. 2021-03-23]. Dostupné z: [https://khkgears.net/new/screw\\_gears.html](https://khkgears.net/new/screw_gears.html)
- [12] INVOLUTE GEAR PROFILE. *KHK Gears* [online]. Kawaguchi-shi: Kohara Gear Industry, c2015 [cit. 2021-03-25]. Dostupné z:

[https://khkgears.net/new/gear\\_knowledge/gear\\_technical\\_reference/involute\\_gear\\_profile.html](https://khkgears.net/new/gear_knowledge/gear_technical_reference/involute_gear_profile.html)

- [13] CALCULATION OF GEAR DIMENSIONS. *KHK Gears* [online]. Kawaguchi-shi: Kohara Gear Industry, c2015 [cit. 2021-03-25]. Dostupné z: [https://khkgears.net/new/gear\\_knowledge/gear\\_technical\\_reference/calculation\\_gear\\_dimensions.html](https://khkgears.net/new/gear_knowledge/gear_technical_reference/calculation_gear_dimensions.html)
- [14] INVOLUTE GEAR PROFILE. *KHK Gears* [online]. Kawaguchi-shi: Kohara Gear Industry, c2015 [cit. 2021-03-07]. Dostupné z: [https://khkgears.net/new/gear\\_knowledge/gear\\_technical\\_reference/involute\\_gear\\_profile.html](https://khkgears.net/new/gear_knowledge/gear_technical_reference/involute_gear_profile.html)
- [15] Evolventní ozubení - teorie. *MITCalc* [online]. Děčín: MITCalc, c2003 - 2021 [cit. 2021-03-27]. Dostupné z: [https://www.mitcalc.com/doc/gear1/help/cz/gear\\_theory.htm](https://www.mitcalc.com/doc/gear1/help/cz/gear_theory.htm)
- [16] LITVIN, Faydor L. Synthesis of Spiral Bevel Gears. *Gear Technology*. March/April 1991, **8**(2), 33-35. ISSN 0743-6858. Dostupné také z: [https://www.geartechnology.com/articles/0391/Synthesis\\_of\\_Spiral\\_Bevel\\_Gears/](https://www.geartechnology.com/articles/0391/Synthesis_of_Spiral_Bevel_Gears/)
- [17] BIJONOWSKI, Brendan. A Practical Approach for Modeling a Bevel Gear. *Gear Technology: The Journal of Gear Manufacturing*. Randall Publications, March/April 2015, **32**(2), 68-75. ISSN 0743-6858. Dostupné také z: [https://www.geartechnology.com/articles/0315/A\\_Practical\\_Approach\\_for\\_Modeling\\_a\\_Bevel\\_Gear/](https://www.geartechnology.com/articles/0315/A_Practical_Approach_for_Modeling_a_Bevel_Gear/)
- [18] FAN, Qi. Kinematical Simulation of Face Hobbing Indexing and Tooth Surface Generation of Spiral Bevel and Hypoid Gears. *Gear Technology: The Journal of Gear Manufacturing*. Randall Publishing, January/February 2006, **23**(1), 30-38. ISSN 0743-6858. Dostupné také z: [https://www.geartechnology.com/articles/0106/Kinematical\\_Simulation\\_of\\_Face\\_Hobbing\\_Indexing\\_and\\_Tooth\\_Surface\\_Generation\\_of\\_Spiral\\_Bevel\\_and\\_Hypoid\\_Gears/](https://www.geartechnology.com/articles/0106/Kinematical_Simulation_of_Face_Hobbing_Indexing_and_Tooth_Surface_Generation_of_Spiral_Bevel_and_Hypoid_Gears/)
- [19] STADTFELD, Hermann J. Development of a Face Hobbed Spiral Bevel Gearset. *Gear Technology: The Journal of Gear Manufacturing*. Randall Publications, September/October 2015, **32**(7), 74-78. ISSN 0743-6858. Dostupné také z: [https://www.geartechnology.com/articles/0915/Development\\_of\\_a\\_Face\\_Hobbed\\_Spiral\\_Bevel\\_Gearset/](https://www.geartechnology.com/articles/0915/Development_of_a_Face_Hobbed_Spiral_Bevel_Gearset/)
- [20] FUENTES-AZNAR, Alfonso a Ignacio GONZALEZ-PEREZ. Mathematical definition and computerized modeling of spherical involute and octoidal bevel gears generated by crown gear. *Mechanism and machine theory* [online]. Elsevier, 2016, **106**, 94-114 [cit. 2020-11-01]. ISSN 0094-114X. Dostupné z: doi:10.1016/j.mechmachtheory.2016.09.003
- [21] TODHUNTER, I. *Spherical Trigonometry: For the Use of Colleges and Schools* [online]. FIFTH EDITION. Project Gutenberg, 2006 [cit. 2021-04-06]. Dostupné z: <http://www.gutenberg.org/ebooks/19770>
- [22] WEISSTEIN, Eric. Spherical Coordinates. *Wolfram MathWorld: the web's most extensive mathematical resource* [online]. Wolfram Research, c1999-2021 [cit. 2021-04-14]. Dostupné z: <https://mathworld.wolfram.com/SphericalCoordinates.html>



- [23] *DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE – ELEKTRONICKÁ SKRIPTA: CYKLIČKÉ KŘIVKY* [online]. Praha: FA ČVUT [cit. 2021-4-29]. Dostupné z: [https://www.fa.cvut.cz/studium/predmety/deskriptivni-geometrie-ii/dg\\_elskripta/krivky/cyklicke\\_krivky.pdf](https://www.fa.cvut.cz/studium/predmety/deskriptivni-geometrie-ii/dg_elskripta/krivky/cyklicke_krivky.pdf)
- [24] LI, Haitao, Wenjun WEI, Pingyi LIU, Di KANG a Shaoying ZHANG. The kinematic synthesis of involute spiral bevel gears and their tooth contact analysis. *Mechanism and machine theory* [online]. Elsevier, 2014, 79, 141-157 [cit. 2021-01-06]. ISSN 0094-114X. Dostupné z: doi:10.1016/j.mechmachtheory.2014.04.014
- [25] PARK, Noh a Hyoung LEE. The spherical involute bevel gear: its geometry, kinematic behavior and standardization. *Journal of Mechanical Science and Technology* [online]. Heidelberg: Korean Society of Mechanical Engineers, 2011, 25(4), 1023-1034 [cit. 2021-02-17]. ISSN 1738-494X. Dostupné z: doi:10.1007/s12206-011-0145-1
- [26] WANG, J., L. KONG, B. LIU, X. HU, X. YU a W. KONG. The mathematical model of spiral bevel gears - A review. *Strojnicki Vestnik/Journal of Mechanical Engineering* [online]. 2014, 60(2), 93-105 [cit. 2020-10-31]. ISSN 00392480. Dostupné z: doi:10.5545/sv-jme.2013.1357
- [27] GONZALEZ-PEREZ, Ignacio a Alfonso FUENTES-AZNAR. Analytical determination of basic machine-tool settings for generation of spiral bevel gears and compensation of errors of alignment in the cyclo-paloid system. *International journal of mechanical sciences* [online]. Elsevier, 2017, 120(C), 91-104 [cit. 2021-5-3]. ISSN 0020-7403. Dostupné z: doi:10.1016/j.ijmecsci.2016.11.018
- [28] LELKES, Mark, Janos MARIALIGETI a Daniel PLAY. Numerical determination of cutting parameters for the control of Klingelnberg spiral bevel gear geometry.(Abstract). *Journal of Mechanical Design* [online]. American Society of Mechanical Engineers, 2002, 124(4), 761 [cit. 2020-11-06]. ISSN 1050-0472. Dostupné z: doi:10.1115/1.1518502

## SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ

$b$	[mm]	Šířka ozubení
$d_{ai}$	[mm]	Průměr hlavové kružnice
$d_{fi}$	[mm]	Průměr patní kružnice
$d_i$	[mm]	Valivý průměr kola
$h_a$	[mm]	Výška hlavy zubu
$h_f$	[mm]	Výška paty zubu
$i$	[–]	Index kola
$\text{inv } \varepsilon$	[rad]	Evolventní funkce (involuta)
$L_m$	[mm]	Střední délka povrchu roztečného kuželu
$\mathbf{M}_{ij}$	[–]	Matice transformace ze souřadného systému $i$ do souřadného systému $j$
$m_n$	[mm]	Modul normálový
$m_t$	[mm]	Modul obvodový
$n_i$	[min <sup>-1</sup> ]	Otáčky ozubeného kola
$R_C$	[mm]	Poloměr hybné valivé kružnice nástroje
$r_{c0}$	[mm]	Jmenovitý poloměr frézovací hlavy
$R_T$	[mm]	Poloměr nehybné valivé kružnice nástroje
$s$	[mm]	Velikost radiálního vyložení nástroje
$\Sigma$	[°]	Úhel mezi osami kol
$S_i$	[–]	Souřadný systém
$Z_0$	[–]	Počet břitových dvojic nástroje
$z_i$	[–]	Počet zubů kola
$\alpha_n$	[°]	Úhel záběru
$\beta_i$	[°]	Úhel sklonu šroubovice šroubového kola
$\delta_{ai}$	[°]	Úhel hlavového kuželu
$\delta_{bi}$	[°]	Úhel základního kuželu
$\delta_{fi}$	[°]	Úhel patního kuželu
$\delta_i$	[°]	Úhel roztečného kuželu
$\psi_{cg}$	[°]	Úhel otočení rovinného kola
$\psi_i$	[°]	Úhel otočení generovaného kola
$\omega_i$	[rad·s <sup>-1</sup> ]	Úhlová rychlost ozubeného kola

## SEZNAM PŘÍLOH

Příloha I – spiral\_bevel\_gear.prt

Příloha II – spiral\_bevel\_gearZ17.stp

Příloha III – spiral\_bevel\_gearZ35.stp